UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

Departamento de Topología y Geometría

TESIS DOCTORAL

Teoría de selecciones : selecciones continuas y uniformemente continuas

MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR
PRESENTADA POR

Rosa Barbolla Garcia

DIRECTOR:

Juan Fontanillas Royes

Madrid, 2015

Rosa Barbolla García

TEORIA DE SELECCIONES: SELECCIONES CONTINUAS Y UNIFORMEMENTE CONTINUAS

Departamento de Topología y Geometría
Facultad de Ciencias Matemáticas
Universidad Complutense de Madrid
1981

Edita e imprime la Editorial de la Universidad
Complutense de Madrid. Servicio de Reprografía
Noviciado, 3 Madrid-8
Madrid, 1981
Xerox 9200 XB 480
Depósito Legal: M-10216-1981

ROSA BARBOLLA GARCIA

TEORIA DE SELECCIONES: SELECCIONES CONTINUAS Y UNIFORMEMENTE CONTINUAS

TESIS DOCTORAL DIRIGIDA por el
Prof. Dr. D. JUAN FONTANILLAS ROYES

DEPARTAMENTO DE GEOMETRIA Y TOPOLOGIA
FACULTAD DE MATEMATICAS
UNIVERSIDAD COMPLUTENSE
MADRID-1980

Este trabajo ha sido elaborado bajo la dirección del Prof. Dr. D. Juan Fontanillas Royes, Profesor Adjunto en el Departamento de Geometría y Topología de la Universidad Autónoma de Madrid.- A él debo agradecer la constante ayuda y colaboración prestados en todo mi estudio.

Igualmente quiero reconocer al Prof. Dr. Don Enrique Outerelo Domínguez, Profesor Agregado en el Departamento de Geometría y Topología de la Universidad Complutense el apoyo que siempre me ha brindado. Sin las contínuas discusiones que con él mantuve a lo largo de varios años, estas líneas nunca se habrían escrito.

INTRODUCCION

I

Un sugestivo problema, por sus aplicaciones, que estudia la topología general es el denominado de extensión, referido a una aplicación contínua o uniformemente contínua.- Se trata de estudiar cuáles son las hipótesis que deben cumplir los espacios X e Y, y el subconjunto A de X para que dada la aplicación f de A en Y, contínua o uniformemente contínua, esté asegurada la existencia de una aplicación $\bar{f}$ de X en Y o de un entorno U de A en Y cuando dicha aplicación es contínua o uniformemente contínua según los casos, y $\bar{f}|A = f$.

Las condiciones en las que una aplicación contínua admite una extensión también contínua, fueron estudiadas sobre todo por Tietze, J. Dugundji y R. Arens.- En particular fue R. ARENS (1) quien demostró que cualquier subconjunto convexo y compacto de un espacio vectorial normado, es un extensor absoluto tanto de la clase de los espacios normales como de la clase de los espacios métricos o paracompactos.- Sin embargo, no siempre es cierto que si Y es un extensor absoluto de un espacio métrico, lo sea también de un espacio paracompacto (2). Este problema fue estudiado por E. MICHAEL, quien demuestra que si Y es un extensor absoluto de un espacio métrico, una condición suficiente para que también lo sea de un espacio paracompacto o normal, es que Y sea un espacio metrizable o metrizable separable respectivamente (3).- Por otro lado, apoyándose en estos teoremas y en los resultados conocidos logrados por R. ARENS, se obtiene la siguiente generalización del Teorema de Tietze: "Sea X un espacio normal, A un subconjunto cerrado de X, Y un espacio de Banach de dimensión finita, K un subconjunto de Y cerrado acotado y convexo, y $f: A \to K$ una aplicación con tínua.- Entonces, existe una aplicación $f:X\to K$ contínua que extiende a f".

Sin embargo, la hipótesis de que Y sea espacio de dimensión finita se obvia introduciendo, para demostrar dicho resultado, técnicas de selecciones contínuas. E. MICHAEL en 1956 enunció en qué condiciones un espacio de Banach es un extensor absoluto de un espacio normal (4), y dio condiciones equivalentes a la definición de aplicación multívoca semi-contínua inferiormente (5) y la siguiente caracterización de espacio paracompacto (6).- "Sea X un espacio T_1 y F(Y) la familia de subconjuntos de Y no vacíos cerrados y convexos.- Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes: a) X es paracompacto b) Si Y es un espacio de Banach, cualquier aplicación $\phi:X\to F(Y)$ semi-contínua inferiormente admite una selección contínua".- Tanto este resultado como la caracterización de espacios normales, sólo son ciertas cuando Y es un espacio de Banach, si se supone ϕ aplicación multívoca semi-contínua inferiormente.- En efecto, si Y es un espacio vectorial normado, existe un espacio X paracompacto y una aplicación $\phi:X\to F(Y)$ semicontínua inferiormente que no tiene una selección contínua (7).- Tampoco se pueden modificar las hipótesis hechas sobre los conjuntos imagen de ϕ aún manteniendo Y espacio de Banach, pues como se demostró (8) existe X espacio métrico, Y espacio de Banach y ϕ una aplicación de X en la familia de subconjuntos abiertos y convexos de Y que es semi-contínua inferiormente, para lo cual no existe una selección contínua.- Sin embargo, cuando se supone ϕ contínua en lugar de semi-contínua inferiormente, se obtiene que "si X es un espacio topológico, Y un espacio vectorial normado y ϕ una aplicación de X en la familia de subconjuntos no vacíos y convexos de Y que es contínua, entonces ϕ admite una selección contínua" (9).

Cuando X es paracompacto y ϕ semi-contínua inferiormente, se pueden modificar las hipótesis hechas sobre la familia de conjuntos imagen de ϕ, y suponer que dicha aplicación está definida de X en la familia de subconjuntos admisibles de Y.- Entonces, si Y es un espacio métrico con estructura convexa (10), existe una aplicación $f:X \to Y$ contínua tal que $f(x) \in \overline{\text{conv}\,[\phi(x)]}$ para todo $x \in X$ (11).- Este resultado mejora los ya obtenidos para X espacio de dimensión infinita, pero en el caso de ser X un espacio de dimensión finita y en particular de dimensión cero, el propio E. MICHAEL ya había demostrado teoremas más generales (12).- B.A. GEILER (13), manteniendo sobre X la hipótesis de ser un espacio topológico de dimensión cero, rebaja las condiciones sobre Y en las que puede asegurar que una aplicación multívoca semi-contínua inferiormente admite una selección contínua, para lo que introduce el concepto de familia equimetrizable por medio de $\mathcal{U}_o \subset \mathcal{U}$ en un espacio uniforme $(Y,\mathcal{U})$ (14).

El Capítulo I de este trabajo demuestra en el Ejemplo 1 que el enunciado del Teorema 1 de B.A. GEILER, no puede prescindir de la hipótesis hecha sobre $\phi(x)$, de ser éste un subconjunto completo del espacio uniforme $(Y,\mathcal{U})$ para todo $x \in X$.- En efecto, si X es un espacio de dimensión cero, existe un espacio uniforme $(Y,\mathcal{U})$ y una aplicación multívoca ϕ de X en Y semi-contínua inferiormente con $\{\phi(x)/x \in X\}$ equimetrizable unifor memente por medio de $\mathcal{U}_0 \subset \mathcal{U}$ y $\phi(x)$ no completo, para la que no existe una selección contínua.- Por otro lado, en este teorema no se puede sustituir la hipótesis de ser X espacio de dimensión cero por ser paracompacto (15).- Si se supone X espacio paracompacto, para que una aplicación semi-contínua inferiormente de X en la familia de subconjuntos convexos y completos con $\{\phi(x)/x \in X\}$ equimetrizable por medio de $\mathcal{U}_0$ admita una selección contínua, hay que suponer Y espacio vectorial topológico localmente convexo, como propone B.A. GEILER y se demuestra en la pág. 8 (16).- Al igual que en el Teorema 3.2" de E. MICHAEL (17), en este resultado tampoco se puede prescindir de la complitud, pues el Ejemplo 3 (18) demuestra que si X es un espacio paracompacto, existe ϕ de X en 2^Y semi-contínua inferiormente, y no hay ninguna aplicación $f:X \to Y$ contínua tal que $f(x) \in \phi(x)$ para todo $x \in X$.-

Se trata de estudiar aquí, si en teoremas como los enunciados por J. Dugundji o R. Arens, se puede obtener que la aplicación $\overline{f}$ que extiende a f sea uniformemente contínua, al sustituir la hipótesis de ser f contínua por uniformemente contínua.- M. KATETOV y J. ISBELL (19) dan condiciones en las que una aplicación f uniformemente contínua admite una extensión que es uniformemente contínua.- También R.L. ELLIS obtuvo algunos resultados particulares para espacios de dimensión cero o espacios uniformes no arquimedianos.- G. VIDOSSICH (20) enunció condiciones generales para resolver este problema:- "Si X es un espacio uniforme de dimensión finita y f una aplicación uniformemente contínua de un subconjunto A de X con valores en la bola unidad cerrada B de un espacio de Banach, existe

$\bar{f}:X \to B$ uniformemente contínua tal que $\bar{f}|A=f$."- G. VIDOSSICH se basó, para la demostración de este resultado, en la aproximación de una aplicación uniformemente contínua por una familia de aplicaciones equiuniformemente contínuas, y no en la existencia de una selección uniformemente contínua para ϕ.-

J. LINDENSTRAUSS propone el empleo de selecciones uniformemente contínuas para el estudio de la extensión de una aplicación uniformemente contínua, pareciendo lógico pensar, al menos en principio, que este problema se puede resolver a través del estudio de la existencia de selecciones uniformemente contínuas para aplicaciones multívocas semi-uniformemente contínuas inferiormente o c-semi-uniformemente contínua inferiormente.- N. NEPOMNJASCII ha estudiado también esta cuestión, a través de la existencia de selecciones uniformemente contínuas para una aplicación multívoca uniformemente contínua.

Si $(X,\mathcal{U})$ es un espacio uniforme, A un subconjunto cualquiera de X, Y un espacio de Banach y $f:A \to Y$ una aplicación uniformemente contínua.- Para que no exista una aplicación $\bar{f}:X \to Y$ uniformemente contínua tal que $\bar{f}|A=f$, es necesario que X sea un espacio de dimensión infinita como demuestra N. NEPOMNJASCII (21). Es así como responde, en parte, a la pregunta que ya J. ISABELL había planteado de cuáles eran las condiciones en las que un espacio de Banach es un extensor absoluto uniforme.- En ese trabajo NEPOMNJASCII (22) enunció un teorema de extensión uniforme demostrando que "cualquier subconjunto S cerrado convexo y acotado de un espacio de Banach Y, es un extensor absoluto uniforme de la clase de los espacios uniformes de dimensión finita", no siendo en general un extensor absoluto uniforme de la clase de los espacios de dimensión infinita (23).-

El problema que planteo, es determinar si existe una categoría de espacios uniformes que contenga a la de espacios uniformes de dimensión finita, para la que sea posible enunciar condiciones en las que un subconjunto S de Y sea un extensor absoluto uniforme de estos espacios.- Dicha categoría es la de los espacios uniformes debilmente de dimensión finita.- Es evidente, que esta categoría contiene a la de espacios uniformes de dimensión finita, pero ambas son distintas, pues existen espacios que son debilmente de dimensión finita pero no lo son de dimensión finita, como por ejemplo R^N.- En efecto, J. FONTANILLAS (24) demuestra que la bola unidad B de un espacio de Banach Y, es un extensor absoluto uniforme de la clase de los espacios uniformes debilmente de dimensión finita y en particular de los de dimensión finita.- Este resultado lo demuestra, introduciendo el concepto de aplicación multívoca de X en B semi-uniformemente contínua inferiormente (25); como consecuencia de ser la aplicación multívoca ϕ de X en B definida por $\phi(a) = \begin{cases} \{f(a)\} & \text{si } a\in A \\ B & \text{si } a\notin A \end{cases}$ semi-uniformemente contínua inferiormente, cuando $f:A \to B$ es uniformemente contínua, y A un subconjunto cualquiera de un espacio X debilmente de dimensión finita, y existir para esta aplicación ϕ una selección uniformemente contínua (26).

En el Capítulo II de esta tesis, se enuncian condiciones en las que un subconjunto S de un espacio Y no necesariamente de Banach, es un extensor absoluto uniforme de un espacio uniforme debilmente de dimensión finita.- En el Teorema 5, §4, se demuestra que un subconjunto S cerrado acotado convexo completo y metrizable de un espacio vectorial topológico localmente convexo, es un extensor absoluto uniforme de la clase de los espacios uniformes debilmente de dimensión finita, y por tanto de los de dimensión finita.- Para demostrar este resultado, hemos generalizado el concepto de aplicación multívoca semi-uniformemente contínua inferiormente, dando una definición de aplicación multívoca de X en Y semi-uniformemente contínua inferiormente cuando $(Y,\mathcal{U})$ es un espacio uniforme, y de aplicación c-semi-uniformemente contínua inferiormente cuando $(Y,\mathcal{U})$ es un espacio vectorial topológico localmente convexo.-

Además, queda demostrado en la proposición 13 §3 que si $\phi:X\to 2^Y$ es uniformemente contínua (27), ϕ es semi-uniformemente contínua inferiormente, y por la proposición 10 - §3 se tiene que si $(Y,\mathcal{U})$ es espacio vectorial topológico localmente convexo, también ϕ es c-semi-uniformemente contínua inferiormente.- Por otro lado, si $(Y,\mathcal{U})=(R,\mathcal{U}_u)$, $f:X\to R$ una aplicación y $\phi:X\to 2^R$ definida por $\phi(x)=[f(x),\to)$, como una condición necesaria y suficiente para que ϕ sea uniformemente contínua es que f sea uniformemente contínua [proposición 5, §3], se tiene que ϕ es semi-uniformemente contínua inferiormente y en particular c-semi-uniformemente contínua inferiormente, siempre que f sea uniformemente contínua.- Sin embargo, para que esta aplicación multívoca ϕ sea c-semi-uniformemente contínua inferiormente no es condición necesaria, aunque sí suficiente, que f sea uniformemente contínua como lo prueba el ejemplo 3 §3.- En la proposición 12 del parágrafo 3 demostramos que una condición suficiente, más debil, para que la aplicación multívoca

$\phi(x)=[f(x),\rightarrow)$ sea c-semi-uniformemente contínua, es que f sea debilmente uniformemente contínua. [Definición 11 § 3].

En el enunciado de los Teoremas 3 y 5 del parágrafo 4, suponemos $(Y,\mathcal{U})$ espacio vectorial topológico localmente convexo no necesariamente metrizable.- Para omitir $(Y,\mathcal{U})$ espacio metrizable, hemos introducido la definición de familia equimetrizable uniformemente por medio de $\mathcal{U}_o \subset \mathcal{U}$.- Es claro que si $(Y,\mathcal{U})$ es un espacio metrizable, cualquier familia $\mathcal{H} \subset P(Y)$ es equimetrizable uniformemente por medio de $\mathcal{U}_o = \mathcal{U}$.- Además, si $\mathcal{H}$ es equimetrizable uniformemente por medio de $\mathcal{U}_o$, $\mathcal{H}$ es equimetrizable por medio de $\mathcal{U}_o$.- Sin embargo, existen familias $\mathcal{H}$ equimetrizables uniformemente por medio de $\mathcal{U}_o$ en espacios no metrizables, tales que $\bigcup_{A\in\mathcal{H}} A$ tampoco es metrizable [Ejemplo 1 §2], y existen familias $\mathcal{H}$ equimetrizables por medio de U_o y no equimetrizables uniformemente por medio de $\mathcal{U}_o$ [Ejemplo 2 §2]

Si $(X,\mathcal{V})$ es un espacio uniforme debilmente de dimensión finita, $(Y,\mathcal{U})$ (28) espacio vectorial topológico localmente convexo, A un subconjunto de X y $f:A \rightarrow S$ una aplicación uniformemente contínua.- La aplicación

$$\phi : x \rightarrow 2^S \qquad x \rightarrow \phi(x) = \begin{cases} \{f(a)\} & \text{si } a\in A \\ S & \text{si } a\notin A \end{cases}$$

es c-semi-uniformemente contínua inferiormente, [Lema 4 § 4], aunque no necesariamente semi-uniformemente contínua inferiormente [Ejemplo 3 §3], ni uniformemente contínua [Ejemplo 1 § 4]. Entonces, si S es metrizable, como $\{\phi(x)/x\in X\}$ es equimetrizable por medio de $\mathcal{U}_o$, se tiene que un subconjunto convexo completo acotado cerrado y metrizable S de $(Y,\mathcal{U})$ espacio vectorial topológico localmente convexo, es un extensor absoluto uniforme de la clase de los espacios uniformes debilmente de dimensión finita y en particular de la de dimensión finita.

Por tanto, si S es un subconjunto metrizable de un espacio vectorial topológico localmente convexo $(Y,\mathcal{U})$, el problema de existencia de una selección uniformemente contínua para una aplicación multívoca ϕ c-semi-uniformemente contínua inferiormente, es el correspondiente al de extensión de una aplicación uniformemente contínua f definida de un subconjunto cualquiera A de X en S, cuando $(X,\mathcal{V})$ es un espacio uniforme debilmente de dimensión finita.

La restricción impuesta sobre S de ser un subconjunto acotado, es necesaria como lo prueba el ejemplo 2 del §4.- Observemos que N. NEPOMNJASCII, aunque supone ϕ uniformemente contínua y por tanto semi-uniformemente contínua, también hace la hipótesis de ser acotado dicho subconjunto (29).

E. MICHAEL (30) demuestra que un espacio Y métrico completo es un extensor absoluto de la clase de los espacios topológicos de dimensión cero.- Si $(Y,\mathcal{U})$ es un espacio uniforme metrizable y completo, entonces, N. NEPOMNJASCII (31) prueba que es un extensor absoluto uniforme de la clase de los espacios uniformes de dimensión cero.- En el Teorema 3 del Capítulo III de este trabajo, se demuestra este resultado sustituyendo ϕ uniformemente contínua por ϕ semi-uniformemente contínua inferiormente. Ahora bien, si $(X,\mathcal{V})$ es un espacio uniforme de dimensión cero, al igual que en el Teorema obtenido por B.A. GEILER, es suficiente suponer $(Y,\mathcal{U})$ espacio uniforme no necesariamente metrizable y $\phi:X \to 2^Y$ con $\{\phi(x)/x\in X\}$ equimetrizable uniformemente por medio de $\mathcal{U}_o \subset \mathcal{U}$, y $\phi(x)$ completo para todo x, para que una aplicación ϕ semi-uniformemente contínua inferiormente (en particular uniformemente contínua) tenga una selección uniformemente contínua [Teorema 4]. Por otro lado, si $(Y,\mathcal{U})$ es un espacio uniforme metrizable, ϕ semi-uniformemente contínua inferiormente, y $\phi(x)$ es un subconjunto completo de X, existe $f:X \to Y$ uniformemente contínua tal que $f(x)\in\phi(x)$ para todo $x\in X$ [corolario 1 - Teorema 4].

Por último, el Ejemplo 1 prueba que no se puede sustituir en estos enunciados el ser $(X,\mathcal{V})$ espacio uniforme de dimensión cero, por X espacio topológico de dimensión cero.

(1) R. ARENS - EXTENSION OF FUNCTIONS IN FULLY NORMAL SPACES. Teoremas 2-4 y 4-3, págs. 14 y 19.

(2) E. MICHAEL - SOME EXTENSION THEOREMS FOR CONTINUOUS FUNCTIONS - Párrafo 6, pág. 801.

(3) E. MICHAEL, ob. cit., Teoremas 3-1 y 3-2, pág. 793.

(4) E. MICHAEL - CONTINUOUS SELECTIONS-I - Teoremas 3-1, págs. 366 y 367.

(5) E. MICHAEL, ob. cit., Proposición 2-1, pág. 365.

(6) E. MICHAEL, ob. cit., Teorema 3-2", pág. 367.

(7) E. MICHAEL, ob. cit., Ejemplo 6.2, pág. 374.

(8) E. MICHAEL, ob. cit., Ejemplo 6.3, pág. 374.

(9) E. MICHAEL - CONTINUOUS SELECTIONS-III - Teorema 8-5, pág. 389.

(10) E. MICHAEL - CONVEX STRUCTURES AND CONTINUOUS SELECTIONS. Definición 1-1, pág. 558.

(11) E. MICHAEL, ob. cit., Teorema 1-3, pág. 558.

(12) E. MICHAEL - CONTINUOUS SELECTIONS-II - Teorema 1, pág. 562 y SELECTED SELECTION THEOREMS, Teorema 2, pág. 233.

(13) B.A. GEILER - ON CONTINUOUS SELECTION IN UNIFORM SPACES - Teorema 1, pág. 1400.

(14) B.A. GEILER, ob. cit., Def. 1, pág. 1400.- Definición recogida en SELECTIONS CONTINUES DANS LES ESPACES UNIFORMES - H. FAKHOURY, pág. 213 y en la definición del párrafo 3 - Capítulo 2 de este trabajo.

(15) Ejemplo 2 de este trabajo que está tomado de E. MICHAEL - CONTINUOUS SELECTIONS-I - Ejemplo 6-1, pág. 374.

(16) B.A. GEILER, ob. cit., pág. 1401.- Este resultado está recogido por H. FAKHOURY, ob. cit., Proposición 2, pág. 214 y en este trabajo Teorema

(17) E. MICHAEL - CONTINUOUS SELECTIONS-I - Teorema 3-2", pág. 367.

(18) El ejemplo 3 de este trabajo está tomado de E. MICHAEL - CONTINUOUS SELECTIONS-I - Ejemplo 6-2, pág. 374, recogido por T. PARTHASARATHY L.N.M. 263 pág. 9 Ejemplo 13.

(19) J. ISBELL - UNIFORM NEIGHBORHOOD RETRACTS - Teorema 1.2, pág. 613.- Resultados recogidos en J. ISBELL - UNIFORM SPACES (1964).

(20) G. VIDOSSICH - A THEOREM ON UNIFORMLY CONTINUOUS EXTENSIONS OF MAPPINGS DEFINED IN FINITE-DIMENSIONAL SPACES.- Teorema 1, pág. 207.

(21) N. NEPOMNJASCII - ON SELECTION AND EXTENSION OF UNIFORMLY CONTINUOUS MAPPINGS - pág. 749.

(22) N. NEPOMNJASCII, ob. cit., Teorema 1, pág. 750, que es análogo al enunciado por E. MICHAEL, Teorema 2-1, pág.

562 - CONTINUOUS SELECTIONS-II.

(23) J. LINDENSTRAUSS - ON LINEAR PROJECTIONS IN BANACH SPACES corolario 1, pág. 282.

(24) J. FONTANILLAS - UN TEOREMA DE SELECCIONES UNIFORMES - Teorema 12, pág. 18.

(25) J. FONTANILLAS, ob. cit., Definición 7.

(26) J. FONTANILLAS, ob. cit., Teorema 8 y Proposición 11.

(27) En la proposición 3 §3 se demuestra una caracterización de ϕ uniformemente contínua.

(28) Si (Y,U) es espacio uniforme, ϕ es semi-uniformemente contínua inferiormente y por tanto c-semi-uniformemente contínua inferiormente, aunque no necesariamente uniformemente contínua.

(29) N. NEPOMNJASCII, ob. cit., Corolario 1, pág. 750.

(30) E. MICHAEL. SELECTED SELECTION THEOREMS. T.2, pág. 233.

(31) N. NEPOMNJASCII, ob. cit., Corolario 2, pág. 751.

CAPITULO I

afirmaciones son equivalentes:

a) X es un espacio paracompacto y T_2.

b) Toda aplicación ϕ de X en la familia de subconjuntos no vacíos cerrados y convexos de un espacio de Banach Y que es semicontínua inferiormente, admite una selección contínua.

En esta caracterización de espacios paracompactos, la hipótesis de ser Y espacio completo no se puede suprimir (1).- Se pueden debilitar esta hipótesis y las condiciones impuestas sobre $\phi(x)$ para todo $x \in X$, si X es un espacio perfectamente de dimensión cero (2).- En este caso, basta suponer Y espacio métrico completo para obtener el teorema demostrado por E. MICHAEL en SELECTED SELECTION THEOREMS (3)

"Sea X un espacio de dimensión cero e Y un espacio métrico completo.- Entonces, cualquier aplicación ϕ de X en la familia de subconjuntos no vacíos y cerrados de Y, que sea semicontínua inferiormente, admite una selección contínua"

<u>COROLARIO</u>

Sea G un grupo topológico metrizable completo, H un subgrupo de G tal que G/H es un grupo perfectamente de dimensión cero y $\phi: G/H \to 2^G$ la aplicación definida por $\phi(\bar{x}) = u^{-1}(\bar{x})$ (4), con $\phi(\bar{x})$ cerrado para todo $\bar{x}$.- Entonces, ϕ admite una selección contínua.

Haciendo la hipótesis de ser X espacio de dimensión cero, en 1970 B.A. GEILER en "ON CONTINUOUS SELECTIONS IN UNIFORM SPACES" demuestra un teorema de extensión de aplicaciones contínuas utilizando técnicas de selecciones contínuas, sustituyendo la hipótesis de ser Y espacio métrico completo por ser Y uniforme y la familia $\{\phi(x)/x\in X\}$ equimetrizable por medio de $\mathcal{U}_o$, dando la siguiente definición de familia equimetrizable por medio de $\mathcal{U}_o$.

Definición 4

Sea $(Y,\mathcal{U})$ espacio uniforme separable y $\{U_n/n\in N\}$ una sucesión de elementos de $\mathcal{U}$ que son base de una estructura uniforme $\mathcal{U}_o$ menos fina que $\mathcal{U}$.- Se dice que una parte de $\mathcal{H}$ de $P(Y)$ es equimetrizable por medio de $\mathcal{U}_o$, si para todo $U\in\mathcal{U}$ existe $U_n\in\mathcal{U}_o$ tal que para todo $A\in\mathcal{H}$ se verifica que $(A\times A)\cap U_n\subset U$.-

® Si Y es un espacio metrizable, cualquier parte $\mathcal{H}$ de $P(Y)$ es una familia equimetrizable por medio de $\mathcal{U}_o=\mathcal{U}$

Con este concepto B.A. GEILER demuestra el siguiente teorema:

"Sean X e Y espacios topológicos, E espacio uniforme, y $\mathcal{U}$ un subconjunto de la familia de subconjuntos no vacíos y completos de E, equimetrizable por medio de $\mathcal{U}_o$.- Supuesto que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\phi} & \mathcal{U} \\ h\downarrow & & \downarrow i \\ Y & \xrightarrow{\Phi} & E_o \end{array}$$

donde h es contínua, i la inclusión, ϕ y Φ aplicaciones semicontínuas inferiormente y E_o el espacio determinado por $\mathcal{U}_o$.- Entonces, si Y es un espacio perfectamente de dimensión ce ro, existen $f:X \to E$ y $g:Y \to E_o$ aplicaciones con tínuas que hacen el siguiente diagrama conmu tativo

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & E \arrow[d, "1"] \\ Y \arrow[r, "g"] & E_o \end{tikzcd}$$

y tales que para todo $x \in X$ y todo $y \in Y$ se veri fica que $f(x) \in \phi(x)$ y $g(y) \in \Phi(y)$.-

COROLARIO

Sea G un grupo topológico, H un subgrupo metrizable de G tal que G/H es un espacio perfectamente de dimensión cero, y $\phi : G/H \to 2^G$ tal que $\phi(\bar{x}) = u^{-1}(\bar{x})$ es un subconjunto completo para todo $\bar{x} \in G/H$.- Entonces, ϕ admite una selec ción contínua.-

Al igual que en el Teorema 3.2"[23] enunciado por E. MICHAEL no se puede rebajar que Y sea completo, en este caso tampoco se puede prescindir de la hipótesis de ser $\phi(x)$ un subconjunto completo para todo $x \in X$.- Si X es un espacio perfectamente de dimensión cero, existen un espacio uniforme E y una aplicación multívoca semicontínua inferiormente, que no admite una selección como lo demuestra este ejemplo.

Ejemplo 1

Sean X el intervalo semiabierto $[0,1)$ y $B = \{[a,b) \ / \ 0 \leq a < b \leq 1\}$ una base de la topolo gía, cuyos elementos son abiertos y cerrados. Entonces, existen un espacio uniforme E y una aplicación multívoca semicontínua inferiormente ϕ definida de X en la familia de subconjuntos no vacíos de E, para la cual no existe una selección contínua.-

Supongamos que A es el subconjunto de X cuyos elementos son todos de números racionales ordenados como una sucesión $z_1, z_2 \ldots\ldots$, E es el espacio vectorial de las funciones y de A en que pertenecen a $l_1(A)$, y además $y(x)\neq 0$ sólo para un número finito de elementos $x\in A$, y C un subconjunto de E cuyos elementos son funciones que toman valores mayores o iguales que cero en todos los puntos x de A.- Es decir

$E=\{y:A\to R/\ \|y\| = \sum_{x\in A}|y(x)| < \infty$ e $y(x)\neq 0$ sólo para un número finito de $x\in A\}$

$C=\{y\in E/y(x)\geq 0$ para todo $x\in A\}$

Definimos una aplicación ϕ del conjunto X en la familia de subconjuntos no vacíos de E como sigue

$$\phi(x)=\begin{cases} C & \text{si } x\in X - A \\ C\cap\{y/\ y(z_n)\geq \frac{1}{n}\} & \text{si } x=z_n \end{cases}$$

La aplicación ϕ así definida, es semicontínua inferiormente ya que para todo $x\in X$, $y\in\phi(x)$ y $\varepsilon>0$, existe un entorno U^x de x, tal que para todo $x'\in U^x$ existe una función $y'\in\phi(x')$ verificando que $\|y-y'\|<\varepsilon$.- [E.MICHAEL - CONTINUOUS SELECTIONS I. Proposición 2.1]

En efecto, para todo $x\in X$, x pertenece a A o bien x es un elemento irracional de X.- Entonces

a) Si $x\in A$, existe un elemento $z_n\in A$ tal que $x=z_n$, y por tanto $\phi(x)=\phi(z_n)=\{y\in C/y(z_n)\geq\frac{1}{n}\}$

Sean $y\in\phi(x)$, $\varepsilon>0$ y U^{z_n} un entorno de z_n en X tal que para todo $x'\in U^{z_n}\cap A$, x' es un elemento z_m con $\frac{1}{m}<\varepsilon$ ó $x'=z_n$. Así, para todo $x'\in U^{z_n}$ se verifica que $x'\in U^{z_n}\cap A$ ó $x'\in U^{z_n}\cap(X-A)$.- Si $x'\in U^{z_n}\cap(X-A)$, como $\phi(x')=C$ y $\phi(x)\subset C$, es trivial que existe un $y'\in\phi(x')$ con $\|y-y'\|<\varepsilon$, pues basta tomar $y'=y$. Por el contrario, si $x'\in U^{z_n}\cap A$, x' será igual a un z_m ó $x'=z_n$.- Si $x'=z_m$, elegimos un y' definido por:

$$y'(x)=\begin{cases} y(x) & \text{si} \quad x\neq z_m \\ y(x)+\frac{1}{m} & \text{si} \quad x=z_m \end{cases}$$

que evidentemente pertenece a $\phi(z_m)$, y verifica la condición $\|y-y'\|<\varepsilon$.- Si $x'=z_n$, como $\phi(x)=\phi(x')$, se toma $y'=y$.

b) Si $x\notin A$, para $y\in\phi(x)=C$ y $\varepsilon>0$, existe un entorno U^x de x en X tal que para todo $x'\in U^x\cap A$, x' es un elemento z_m con $\frac{1}{m}<\varepsilon$.- Entonces, para todo $x'\in U^x$, si x' es un elemento racional ($x'=z_m$), podemos elegir un $y'\in\phi(x')$ de manera análoga al apartado a), verificando que $\|y'-y\|<\varepsilon$. Si $x'\in U^x\cap(X-A)$, como $\phi(x)=\phi(x')=C$, es evidente que existe un $y'\in\phi(x')$ ($y'=y$) verificando que $\|y'-y\|<\varepsilon$.

Por tanto, esta aplicación ϕ es semicontínua inferiormente, y para todo $x\in X$ se verifica que $\phi(x)\neq\emptyset$.- Sin embargo, el subconjunto $\phi(x)$ no es completo para todo $x\in X$, ya que el conjunto C no lo es.

En efecto, sea M el subconjunto de X cuyos elementos son los números racionales de la forma $x_n=\frac{1}{2^n}$ para todo $n\in N$ y $\{f_n \ / \ n\in N\}$ la sucesión de elementos de C definida por

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^i} & \text{si} \quad x = x_i \quad i=1,2\ldots n \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

La función límite de esta sucesión de funciones es una función distinta de cero en un número no finito de puntos $x \in A$, y por tanto no pertenece a C.- Luego el conjunto C no es completo.

Supongamos que la aplicación ϕ antes definida admite una selección, es decir, que existe una ampliación contínua $f: X \to E$ tal que para todo $x \in X$ $f(x) \in \phi(x)$.- Esta apliación será contínua en cada $z_n \in A$, y para cada z_n existe un entorno $U^{z_n} = [z_n, z_n + \delta) \subset X$ tal que para todo $x \in U^{z_n}$ se verifica que $f(x)\ (z_n) > 0$.- Sea $U_*^{z_n} = [z_n, a_n]$ con $z_n < a_n < z_n + \delta$.- Por inducción construímos una sucesión de números naturales $\{n_k\}_{k \in N}$ tales que $z_{n_{k+1}} \in \bigcap_{i=1}^{k} U_*^{z_{n_i}} \subset$ $\subset \bigcap_{i=1}^{k} U^{z_{n_i}}$.- Entonces, como existe un punto $x_o \in \bigcap_{i \in N} U_*^{z_{n_i}}$; x_o será un elemento que pertenece a $U^{z_{n_k}}$ para todo k y por tanto $f(x_o)\ (z_{n_k}) > 0$ para todo k, lo cual es imposible.

Así, para esta aplicación ϕ semicontínua inferiormente no existe una selección contínua. □

Además, en el teorema demostrado por B.A. GEILER [14], no se puede sustituir la hipótesis de ser X espacio perfectamente de dimensión por ser un espacio paracompacto, manteniendo las demás hipótesis del teorema.- El ejemplo 6.1-pág. 374-enunciado por E. MICHAEL en CONTINUOUS SELECTIONS-I así lo demuestra.-

Ejemplo 2

Sea X el intervalo unidad $[0,1]$.- Entonces, existen un espacio uniforme E y una aplicacación multívoca ϕ semicontínua inferiormente definida de X en 2^E, con $\phi(x)$ no vacío y completo para todo $x\in X$ y la familia $\{\phi(x)\}_{x\in X}$ equimetrizable, la cual no admite una selección contínua.

Basta suponer el espacio E de pares de números reales, S es una función definida por $S(x)=\mathrm{Sen}\frac{1}{x}$ si $x\in R-\{o\}$ y A un subconjunto de E que consiste en el grafo de la función S unión con el intervalo cerrado $\{0\}\times[-1,1]$.

$$A = \mathrm{Grafo}\ (S)\cup\{(0,x)\ /\ -1\leq x\leq 1\}$$

La aplicación ϕ definida de X en 2^E por

$$\phi(x) = \{(y,z)\in A\ /\ \tfrac{1}{2}x\leq y\leq x\}$$

es semicontínua inferiormente. Además, la familia $\{\phi(x)\}_{x\in X}$ es equimetrizable y $\phi(x)$ es un subconjunto completo para todo $x\in X$, pero no existe una aplicación $f:X\to E$ contínua tal que $f(x)\in\phi(x)$ para todo $x\in X$. $\square$

Si X es un espacio paracompacto, se obtiene un resultado análogo modificando las condiciones sobre el espacio E y sobre la familia de subconjuntos imagen de ϕ como sigue (5):

"Sea X un espacio paracompacto, E un espacio vectorial topológico localmente convexo, $\zeta(E)$ la familia de subconjuntos no vacíos conexos y completos de E, y ϕ de X en $\zeta(E)$ una aplicación semicontínua inferiormente.

Entonces, si $\{\phi(x)\}_{x\in X}$ es una familia equimetrizable por medio de $\mathcal{U}_o$, existe una selección f para ϕ.

Demostración

Como E es un espacio vectorial topológico localmente convexo, para todo n existen V_n entorno simétrico, abierto y convexo de cero y $U_n = \{(x,y) \in E\times E/x-y\in V_n\}$ tales que $V_{n+1}+V_{n+1} \subset V_n$ y por tanto $U^2_{n+1} \subset U_n$ y $U_{n+1} \subset U_n$; siendo $\{U_n\}_{n\in N}$ base de la uniformidad $\mathcal{U}_o$.

La familia $\{\phi(x)/x\in X\}$ de subconjuntos de E es por hipótesis equimetrizable por medio de $\mathcal{U}_o$, por tanto, para todo $U \in \mathcal{U}$ existe un $U_n \in U_o$ verificándose que para todo $x\in X$

$$[\phi(x) \times \phi(x)] \cap U_n \subset U$$

Por ser X espacio paracompacto, ϕ una aplicación semicontínua inferiormente definida de X en $\zeta(E)$, y $V_1 = U_1 [0]$ un entorno convexo de cero, existe una aplicación contínua $f_1: X \to E$ que es una V_1 -aproximación de ϕ [E. Michael -Continuous Selections I-Lema 4-1, pág. 368].- Es decir, para todo $x\in X$ se verifica que

$$(f_1(x) + V_1) \cap \phi(x) \neq \emptyset$$

Definimos una aplicación multívoca ϕ_2 de X en 2^E por

$$\phi_2(x) = (f_1(x) + V_1) \cap \phi(x) \text{ para todo } x \in X$$

que es semicontínua inferiormente [E. Michael- Continuous Selections I - Proposición 2-5, pág. 366].- Como $V_2=U_2 [0]$ es un entorno convexo de cero, existe una aplicación contínua $f_2: X \to E$ que es una V_2-aproximación para ϕ_2, y por tanto se verifica que para todo $x\in X$

$$(f_2(x) + V_2) \cap \phi(x) \neq \emptyset$$

Supongamos construídas las f_i $i=1\dots n$ aplicaciones contínuas definidas de X en E que son V_i-aproximaciones para ϕ_i $i=1\dots n$, siendo $V_i=U_i\ [0]$ $i=1\dots n$ entorno convexo de cero, $(f_{i-1}(x)+V_{i-1})\cap\phi_{i-1}(x)\neq\emptyset$ y $\phi_i(x)=(f_{i-1}(x)+V_{i-1})\cap\phi_{i-1}(x)$ para todo $x\in X$ e $i=1\dots n$.- Entonces, podemos definir la aplicación ϕ_{n+1} de X en 2^E por

$$\phi_{n+1}(x) = (f_n(x)+V_n)\cap\phi_n(x) \text{ para todo } x\in X,$$

que es semicontínua inferiormente.

Así, hemos obtenido una sucesión $\{\phi_n\}_{n\in N}$ $(\phi_1=\phi)$ de aplicaciones semicontínuas inferiormente definidas de X en 2^E, verificando que

1) $\phi_{n+1}(x)\subset\phi_n(x)$ para todo $x\in X$ y todo n $(\phi_1=\phi)$.

2) $[\phi_{n+1}(x)\times\phi_{n+1}(x)]\subset U_{n-1}$ para todo $x\in X$ y todo $n>1$.- En efecto, por la definición de ϕ_{n+1} tenemos que para todo $x\in X$ y todo $n>1$ $[\phi_{n+1}(x)\times\phi_{n+1}(x)]=[(f_n(x)+V_n)\cap\phi_n(x)]\ \times$ $\times\ [(f_n(x)+V_n)\cap\phi_n(x)]$ y como

$[(f_n(x)+V_n)\cap\phi_n(x)]\times[(f_n(x)+V_n)\cap\phi_n(x)]\subset[\phi_n(x)\times\phi_n(x)]\cap U_{n-1}$

porque si $(y,y')\in[(f_n(x)+V_n)\cap\phi_n(x)]\times[(f_n(x)+V_n)\cap\phi_n(x)]$, y e y' pertenecen a $f_n(x)+V_n$ y a $\phi_n(x)$ e $y-y'\in V_{n-1}$, pues $y-y'=y-f_n(x)+f_n(x)-y'\in V_n+V_n\subset V_{n-1}$, y por tanto $(y,y')\in[\phi_n(x)\times\phi_n(x)]\cap U_{n-1}$, obtenemos que

$[\phi_{n+1}(x)\times\phi_{n+1}(x)]\subset[\phi_n(x)\times\phi_n(x)]\cap U_{n-1}\subset U_{n-1}$ para todo $x\in X$ y todo $n>1$.

3) $\{\phi_n(x)\ /\ n\in N\}$ es una base de filtro de Cauchy en $\phi(x)$

para todo $x \in X$, por la ser la familia $\{\phi(x)/x \in X\}$ equimetrizable por medio de $\mathcal{U}_o$.

4) Como $\phi(x)$ para todo $x \in X$ es un subconjunto completo de E, existe $f(x) \in \lim_n \{\phi_n(x)\}$ para todo $x \in X$.

5) f es una aplicación contínua, porque la base de filtro de Cauchy $\{\phi_n(x)/n \in N\}$ converge uniformemente a $f(x)$.

6) Para todo $x \in X$ $f(x) \in \phi(x)$; pues como para todo $x \in X$ y todo n, $\phi_n(x) \neq \emptyset$ y $\phi_n(x) \subset \phi(x)$, existe una sucesión $\{x_n\}_{n \in N}$ de elementos de $\phi(x)$ con $x_n \in \phi_n(x)$ que converge a $f(x)$.- Entonces, para todo $x \in X$ tenemos que $f(x) \in \phi(x)$ pues $\phi(x)$ es un subconjunto cerrado para todo $x \in X$. □

Es evidente que no se puede prescindir en el teorema anterior de la condición de ser $\phi(x)$ uh subconjunto convexo para todo $x \in X$ como lo demuestra el ejemplo 2-pág. 8 .- El ejemplo 6-3, pág. 374 -E. MICHAEL, Continuous Selections I, (6) demuestra que tampoco se puede omitir en dicho enunciado el que $\phi(x)$ sea un subconjunto completo de E para todo $x \in X$.

<u>Ejemplo 3</u>

Sea X el intervalo unidad $[0,1]$. Entonces, existen un espacio vectorial topológico localmente convexo y una aplicación multívoca ϕ de X en la familia de subconjuntos no vacíos y convexos de E semicontínua inferiormente con $\{\phi(x)/x \in X\}$ equimetrizable por medio de $\mathcal{U}_o$, para la cual no existe una selección contínua.

Si A es el subconjunto de los números racionales de $[0,1]$ ordenados como una sucesión, existen E espacio vectorial topológico localmente convexo $E=\{y:A\to R/ \|y\| < \infty$ e $y(x) \neq 0$ sólo para un número finito de elemento x de $A\}$ y una aplicación semicontínua inferiormente definida por

$$\phi(x) = \begin{cases} \{y\in E \ / \ y(x) \geq 0 \quad \text{para todo } x\in A\} & \text{si } x\in X-A \\ \{y\in E \ / \ y(x) \geq 0 \quad \forall x\in A \text{ y además } y(z_n) \geq \frac{1}{n}\} & \text{si } x=z_n \end{cases}$$

verificándose que la familia $\{\phi(x)/x\in X\}$ es equimetrizable, $\phi(x)$ un subconjunto convexo para todo $x\in X$, pero no existe una aplicación contínua $f:X\to E$ tal que para todo $x\in X$, $f(x)\in \phi(x)$. □

(1) La hipótesis de ser Y espacio de Banach se puede sustituir por ser Y espacio de Frechet, pero no se puede omitir la condición de ser Y espacio completo.

(2) Un espacio topológico (X,T) es un espacio de dimensión cero, si tiene una base de conjuntos abiertos y cerrados.- Un espacio topológico (X,T) es un espacio perfectamente de dimensión cero si todo recubrimiento abierto de X tiene un refinamiento abierto de elementos disjuntos dos a dos.
Tanto E. MICHAEL como T. PARTHASARATHY enuncian el teorema suponiendo X espacio paracompacto y cero dimensional en lugar de la notación de perfectamente cero dimensional.- A.R. PEARS. Proposición 1.14-pág. 217.

(3) Este teorema está recogido por T. PARTHASARATHY en SELECTION THEOREMS AND THEIR APLICATIONS-CONTINUOUS SELECTION-Teorema 1.2.

(4) $\phi(\bar{x}) = u^{-1}(\bar{x})$ es l.s.c. E. MICHAEL [23]
y T. PARTHASARATHY

(5) Este resultado lo enuncia B.A. GEILER y lo recoge FAKHOURY en la PROPOSICION-2.

(6) Este ejemplo lo recoge T. PARTHASARATHY.

CAPITULO II

CAPITULO II

SELECCIONES UNIFORMEMENTE CONTINUAS EN ESPACIOS UNIFORMES DEBILMENTE DE DIMENSION FINITA

§ 1 - Conceptos y resultados conocidos

Definición 1

Sea $(X,\mathcal{V})$ un espacio uniforme.- Un recubrimiento $\{U_\alpha | \alpha \in \Lambda\}$ de X es un recubrimiento uniforme de X en $(X,\mathcal{V})$, si existe un $U \in \mathcal{V}$ verificando que $\{U[x] / x \in X\}$ (1) es un refinamiento de $\{U_\alpha | \alpha \in \Lambda\}$, es decir, si existe un $U \in \mathcal{V}$ tal que para todo $x \in X$ existe $\alpha \in \Lambda$ con $U[x] \subset U_\alpha$.-

Si $\{U_\alpha | \alpha \in \Lambda\}$ es un recubrimiento uniforme de $(X,\mathcal{V})$, cualquier refinamiento uniforme $\{U_\beta | \beta \in B\}$ de él es también un recubrimiento uniforme de $(X,\mathcal{V})$.

De entre los recubrimientos uniformes de $(X,\mathcal{V})$, se consideran sólo los de dimensión finita que permiten dar las definiciones de espacio uniforme de dimensión finita y espacio uniforme débilmente de dimensión finita, conceptos que juegan un papel importante en este capítulo.

Definición 2

Sea $(X,\mathcal{V})$ un espacio uniforme.- Se dice que un recubrimiento uniforme $\{U_\alpha | \alpha \in \Lambda\}$ de $(X,\mathcal{V})$ es de dimensión finita n, si n es el mayor entero para el que existe un subconjunto M de Λ, con n+1 elementos tales que $\bigcap_{\alpha \in M} U_\alpha$ es no vacío.

Definición 3 (2)

Sea $(X,\mathcal{V})$ un espacio uniforme.- Se dice que $(X,\mathcal{V})$ es un espacio uniforme de dimensión finita n, si cualquier recubrimiento uniforme de $(X,\mathcal{V})$ tiene un refinamiento uniforme de dimensión finita n.

Definición 4

Sea $(X,\mathcal{V})$ un espacio uniforme.- Se dice que $(X,\mathcal{V})$ es un espacio uniforme débilmente de dimensión finita, si cualquier recubrimiento uniforme de $(X,\mathcal{V})$ tiene un refinamiento uniforme de dimensión finita.

® Si un espacio es compacto o de dimensión finita, es también débilmente de dimensión finita.- Sin embargo, existen espacios débilmente de dimensión finita que no son compactos ni de dimensión finita, como lo prueba el hecho de pertenecer el espacio R^N a la categoría de los espacios débilmente de dimensión finita, y no ser un elemento de las categorías de espacios compactos o espacios de dimensión finita.

Definición 5

Sean $(X,\mathcal{V})$ e $(Y,\mathcal{U})$ espacios uniformes.- Se dice que la familia de aplicaciones $\{f_\alpha : X \to Y / \alpha \in \Lambda\}$ es equiuniformemente contínua, si para todo $U \in \mathcal{U}$ existe $V \in \mathcal{V}$ tal que para todo $\alpha \in \Lambda$ se verifica que $(f_\alpha \times f_\alpha)(V) \subset U$.

Definición 6

Sea $(X,\mathcal{V})$ un espacio uniforme.- Entonces, cualquier recubrimiento uniforme $\{U_\alpha / \alpha \in \Lambda\}$ de $(X,\mathcal{V})$, tiene una parti ción $\{p_\alpha/\alpha\in\Lambda\}$ equiuniformemente contínua subordinada a él.

Proposición 7

Sea $(X,\mathcal{V})$ un espacio uniforme, $\{U_\alpha/\alpha\in\Lambda\}$ un recubrimiento uniforme de $(X,\mathcal{V})$ y $\{p_\alpha/\alpha\in\Lambda\}$ una participación de la unidad equiuniformemente contínua subordinada a $\{U_\alpha/\alpha\in\Lambda\}$.- Entonces, si $\{V_\beta^\alpha/\beta\in B(\alpha)$ y $\alpha\in\Lambda\}$ es un refinamiento de $\{U_\alpha/\alpha\in\Lambda\}$ tal que para todo $\alpha\in\Lambda$ $U_\alpha=\bigcup_{\beta\in B(\alpha)} V_\beta^\alpha$, existe una partición de la unidad equiuniformemente contínua $\{p_\beta^\alpha/\beta\in B(\alpha)$ y $\alpha\in\Lambda\}$ subordinada a $\{V_\beta^\alpha/\beta\in B(\alpha)$ y $\alpha\in\Lambda\}$ verificando que, $p_\alpha(x)=\sum_{\beta\in B(\alpha)} p_\beta^\alpha(x)$ para todo $x\in X$ y todo $\alpha\in\Lambda$. □

La definición de aplicación multívoca semiuniformemente contínua inferiormente definida de X en 2^E, cuando $(X,\mathcal{V})$ es un espacio uniforme y E la bola unidad de un espacio de Banach, fue dada por J. Fontanillas en "UN TEOREMA DE SELECCIONES CONTINUAS" como sigue:

Definición 8

Sea $(X,\mathcal{V})$ un espacio uniforme, E la bola unidad de un espacio de Banach, ϕ una aplicación multívoca de X en E, $\{U_\alpha/\alpha\in\Lambda\}$ un recubrimiento uniforme de $(X,\mathcal{V})$ e $\{y_\alpha/\alpha\in\Lambda\}$ un subconjunto de E.- Se dice que $\{U_\alpha,y_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ es una r-selección uniforme para ϕ $(r\in R^+)$, si para todo $\alpha\in\Lambda$ y para todo $x\in U_\alpha$, se verifica que $\phi(x)\cap B_r(y_\alpha)\neq\emptyset$.

Definición 9

Sea $(X,\mathcal{V})$ un espacio uniforme, E la bola unidad de un espacio de Banach, ϕ una aplicación multívoca de X en E, r y t elementos de R^+, $\{U_\alpha, y_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ una r-selección uniforme para ϕ, y $\{U'_\beta, y'_\beta\}_{\beta\in B}$ una t-selección uniforme para ϕ.- Se dice que esta t-selección uniforme para ϕ está subordinada a la r-selección uniforme $\{U_\alpha, y_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$, si existe una partición $\{B(\alpha)/\alpha\in\Lambda\}$ de B tal que

i) $\{U'_\beta/\beta\in B\}$ es un refinamiento de $\{U_\alpha/\alpha\in\Lambda\}$ tal que para todo $\alpha\in\Lambda$ se verifica que $U_\alpha = \bigcup_{\beta\in B(\alpha)} U'_\beta$.

ii) El subconjunto $\{y'_\beta/\beta\in B\}$ de puntos de E, debe de verificar que $y'_\beta \in B_r(y_\alpha)$ para todo $\alpha\in\Lambda$ y todo $\beta\in B(\alpha)$.

Definición 10

Sea $(X,\mathcal{V})$ un espacio uniforme, E la bola unidad de un espacio de Banach Y, y ϕ una aplicación multívoca de X en E.- Se dice que ϕ es semi-uniformemente contínua inferiormente si

i) Para todo n, existe una $\frac{1}{2^n}$ -selección uniforme para ϕ.

ii) Si $\{U_\alpha, y_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ es una $\frac{1}{2^n}$-selección uniforme para ϕ, existe una $\frac{1}{2^{n+1}}$-selección uniforme para ϕ subordinada a $\{U_\alpha, y_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$.

Proposición 11

Sea $(X,\mathcal{V})$ un espacio uniforme debilmente de dimensión finita, $\tau(E)$ la familia de subconjuntos no vacíos, cerrados y convexos de la bola unidad E, y ϕ una aplicación multívoca de X en E.- Entonces, si para todo $r > 0$ el subconjunto U_r de $X \times X$ definido por

$$U_r = \left\{ (x,x') \in X \times X \Big/ \begin{array}{lll} \forall\, l \in \phi(x) & '' & \phi(x') \cap B_r(l) \neq \emptyset \\ y & & \\ \forall\, l' \in \phi(x') & '' & \phi(x) \cap B_r(l') \neq \emptyset \end{array} \right\}$$

es un elemento de $\mathcal{U}$, la aplicación ϕ es semi-uniformemente contínua inferiormente. □

<u>Definición 12</u>

Sean $(X,\mathcal{V})$ e $(Y,\mathcal{U})$ espacios uniformes y ϕ una aplicación multívoca de X en Y.- Una selección uniformemente contínua para ϕ, es una aplicación uniformemente contínua $f:(X,\mathcal{V}) \to (Y,\mathcal{U})$ tal que $f(x) \in \phi(x)$ para todo $x \in X$.

<u>Definición 13</u>

Sean $(X,\mathcal{V})$ e $(Y,\mathcal{U})$ espacios uniformes, A un subconjunto de X y $f:(A,\mathcal{V}|_{A\times A}) \to (Y,\mathcal{U})$ una aplicación uniformemente contínua.- Se dice que Y es un extensor uniforme absoluto de X, si existe una aplicación $\bar{f}:(X,\mathcal{V}) \to (Y,\mathcal{U})$ que extiende a f.-

La bola unidad E de un espacio de Banach Y, es un extensor uniforme absoluto de la clase de los espacios uniformes debilmente de dimensión finita, como se deduce de los siguientes resultados.

Proposición 14

Sea $(X,\mathcal{V})$ un espacio uniforme debilmente de dimensión finita.-

i) Si $\phi:X \to \mathcal{T}(E)$ es una aplicación semi-uniformemente contínua inferiormente, admite una selección uniformemente contínua.

ii) Sea A un subconjunto de X, f una aplicación de A en E uniformemente contínua, y ϕ una aplicación de X en 2^E definida por

$$\phi(a) = \begin{cases} \{f(a)\} & \text{si} \quad a \in A \\ E & \text{si} \quad a \notin A \end{cases}$$

Entonces, ϕ es semi-uniformemente contínua inferiormente.

Teorema 15

Sea $(X,\mathcal{V})$ un espacio uniforme debilmente de dimensión finita, A un subconjunto de X y f una aplicación de A en E uniformemente contínua.- Entonces, existe una aplicación $\bar{f}$ de X en E uniformemente contínua que extiende a f.- □

§ 2 - Equimetrizabilidad

Definición 1

Sea $(Y,\mathcal{U})$ un espacio uniforme y $\{U_n \mid n\in N\}$ una sucesión de elementos de $\mathcal{U}$ que es base de $\mathcal{U}_o$ menos fina que $\mathcal{U}$.- Una parte $\mathcal{H}$ de $P(Y)$ se dice que es equimetrizable uniformemente por medio de $\mathcal{U}_o$, si para todo $U\in\mathcal{U}$ existe $U_n\in\mathcal{U}_o$ tales que para todo A y A' $\mathcal{H}$ se verifica que $(A \times A')\cap U_n \subset U$.

Proposición 2

Sea $(Y,\mathcal{U})$ un espacio uniforme y $\mathcal{H}$ una parte de $P(Y)$.- Las siguientes afirmaciones son equivalentes

a) $\mathcal{H}$ es equimetrizable uniformemente por medio de $\mathcal{U}_o$.

b) La familia $\mathcal{H}^* = \{A\cup A'/A,A'\in H\}$ es equimetrizable por medio de $\mathcal{U}_o$.

Demostración

$(a \Rightarrow b)$

Sean A_1 y A'_a elementos de H.- Como H es equimetrizable uniformemente por medio de U_o, para todo $U\in U$ existe $U_n \in U_o$ tal que para todo A y $A'\in H$ se verifica que $(A\times A')\cap U_n \subset U$ y en particular que $(A_1\times A_1)\cap U_n \subset U$, $(A_1\times A'_1)\cap U_n \subset U$, $(A'_1\times A_1)\cap Y_n \subset U$ y $(A'_1\times A'_1)\cap U_n \subset U$. Por otro lado se verifica que $[(A_1\cup A'_1) \times (A_1\cup A'_1)]\cap U_n =$
$= [(A_1\times A_1)\cap U_n]\cup[(A_1\times A'_1)\cap U_n]\cup[(A'_1\times A_1)\cap U_n]\cup[(A'_1\times A'_1)\cap U_n]$.-

Así, para todo $U \in \mathcal{U}$ existe $U_n \in \mathcal{U}_o$ tal que $[(A_1 \cup A'_1) \times (A_1 \cup A'_1)] \cap U_n \subset U$, y por tanto la familia $\mathcal{H}^*$ es equimetrizable por medio de $\mathcal{U}_o$.

(b ⇒ a)

Como $\mathcal{H}^*$ es equimetrizable por medio de $\mathcal{U}_o$ y para todo U_n y todo $A, A' \in \mathcal{H}$ se verifica que

$$[A \times A'] \cap U_n \subset [(A \cup A') \times (A \cup A')] \cap U_n$$

la familia $\mathcal{H}$ es uniformemente equimetrizable por medio de $\mathcal{U}_o$.

Corolario

Sea $(Y, \mathcal{U})$ espacio uniforme, y $\mathcal{H} \subset P(Y)$ una familia equimetrizable por medio de $\mathcal{U}_o \subset \mathcal{U}$.- Si para todo H y $H' \in \mathcal{H}$ existe $H'' \in \mathcal{H}$ tal que $H \cup H' \subset H''$, entonces, la familia $\mathcal{H}$ es equimetrizable uniformemente por medio de $\mathcal{U}_o$.-

Demostración

Como para todo H y $H' \in \mathcal{H}$ y todo U_n se verifica que

$$(H \times H') \cap U_n \subset [(H \cup H') \times (H \cup H')] \cap U_n \subset (H'' \times H'') \cap U_n \,,$$

y por hipótesis la familia $\mathcal{H}$ es equimetrizable por medio de $\mathcal{U}_o$, se tiene que para todo $U \in \mathcal{U}$ existe $U_n \in \mathcal{U}_o$ tales que para todo H y $H' \in \mathcal{H}$ $(H \times H') \cap U_n \subset (H'' \times H'') \cap U_n \subset U$, y por tanto, la familia $\mathcal{H}$ es equimetrizable uniformemente por medio de $\mathcal{U}_o$. □

Si $\mathcal{H} \subset P(Y)$ es una familia equimetrizable uniformemente por medio de $\mathcal{U}_o$, es también equimetrizable por medio de $\mathcal{U}_o$.- Sin embargo, existen familias equimetrizables por medio de $\mathcal{U}_o$ que no son equimetrizables uniformemente por medio de $\mathcal{U}_o$ como lo demuestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1

Sea E un espacio vectorial topológico localmente convexo no metrizable y H un subespacio metrizable.- Entonces, la familia de clases $\{x+H/x\in E\}$ es equimetrizable por medio de $\mathcal{U}_o$, pero no es equimetrizable uniformemente por medio de $\mathcal{U}_o$.

En efecto, sea $\{V_n/n\in N\}$ una sucesión de entornos de cero en E tal que la sucesión $\{W_n/n\in N\}$ con $W_r=V_n \cap E$ es un sistema fundamental de entornos de cero en H. $U_n=\{(x,y)\in E\times E/x-y\in V_n\}$ el elemento de la uniformidad de E asociado a V_u, y $\mathcal{U}_o$ la estructura uniforme engendrada por $\{U_n/n\in N\}$.

La familia $\mathcal{H}=\{x+H/x\in E\}$ es equimetrizable por medio de $\mathcal{U}_o$ como lo demuestra H. FAKHOURY - SELECTIONS CONTINUES DANS LES ESPACES UNIFORMES - pág. 213 -, pero no es una familia equimetrizable uniformemente por medio de $\mathcal{U}_o$.

Como E no es metrizable, existe V entorno de cero tal que para todo n $V_n \not\subset V$, y por tanto para todo n existe un elemento $x_n \in V_n - V$.- Sea $U=\{(x,y)\in E\times E/x-y\in V\}$ el elemento de la uniformidad de E asociado a V.- Entonces, para todo

U_p existen $x+H$ e $y+H \in \mathcal{H}$ tales que

$$[(x+H) \times (y+H) \cap U_p] \not\subset U$$

En efecto, para todo U_p, si tomamos $x=0$ e $y=x_p$, las clases $x+H=H$ e $y+H=x_p+H$ verifican que $[H\times(x_p+H)] \cap U_p \not\subset U$, pues existe $(t,z)=(t,x_p+t)$ que pertenece a $[H\times(x_p+H)] \cap U_p$ pues $z-t=x_p \in V_p$, y no pertenece a U ya que $z-t=x_p \notin V$.- Por tanto, la familia $\mathcal{H}$ que es equimetrizable por medio de $\mathfrak{U}_o$, no es equimetrizable uniformemente por medio de $\mathfrak{U}_o$. □

® Si $(E,\mathfrak{U})$ es un espacio seudo-metrizable, toda familia $\mathcal{H}$ de $P(E)$ es equimetrizable uniformemente por medio de $\mathfrak{U}_o = \mathfrak{U}$, y por tanto equimetrizable por medio de $\mathfrak{U}_o$.- Sin embargo, existen familias equimetrizables uniformemente por medio de $\mathfrak{U}_o$ en un espacio E no metrizable.

<u>Ejemplo 2</u>

Sea E un espacio vectorial topológico localmente convexo T_2 y no metrizable con una norma contínua.- Entonces, existe una familia $\mathcal{H}$ equimetrizable uniformemente por medio de $\mathfrak{U}_o$.

Por ser E un espacio vectorial topológico localnente convexo T_2 y no metrizable con una norma contínua (3) existe una sucesión $\{U_n / n\in N\}$ tal que $\bigcap_{n\in N} U_n = \Delta$ y con $\overline{U}_1 \neq E\times E$.- Por ser E no es metrizable, para todo $a\in E$ todo entorno V^a no es metrizable, y como $(E\times E)-\overline{U}_1$ es abierto, existe $(a,b) \in (E\times E)-\overline{U}_1$ y existen V^a y V^b entornos de a y b respectivamente no metrizables, tales que $V^a \times V^b \subset (E\times E)-\overline{U}_1$.

Sea $H=\{a\}$ que es metrizable por $\{U_n/n\in N\}$ y verifica que $H\cap V^b=\emptyset$.- Así, la familia $\mathcal{H}=\{\{a\}\cup\{m\}\mid m\in V^b\}$ de subconjuntos de E, es equimetrizable uniformemente por medio de $\mathcal{U}_0$ -(con $\{U_n/n\in N\}$ base de $\mathcal{U}_0$) y por otro lado $\bigcup_{m\in V^b}[\{a\}\cup\{m\}]=\bigcup_{m\in V^b}[H\cup\{m\}]$ no es metrizable, pues V^b no es metrizable y $V^b\subset\bigcup_{m\in V^b}[H\cup\{m\}]$.

Veamos que la familia $\mathcal{H}$ es equimetrizable uniformemente por medio de $\mathcal{U}_0$.- En efecto, para todo $m,m'\in V^b$ existe U_p tal que si $m\neq m'$ se verifica que $[H\cup\{m\})\times(H\cup\{m'\})\cap U_p]=$

$=[(H\times H)\cap U_p]\cup[(H\times\{m'\})\cap U_p]\cup[(\{m\}\times H)\cap U_p]\cup[(\{m\}\times\{m'\})\cap U_p]$

$=(H\times H)\cap U_p$

pues para todo n, $(H\times\{m'\})\cap U_n=(\{m\}\times H)\cap U_n=\emptyset$, y como $\bigcap_{n\in N}U_n=\Delta$, para todo m y $m'\in V^b$ con $m\neq m'$ existe U_p tal que $(\{m\}\times\{m'\})\cap U_p=\emptyset$.- Entonces, como H es metrizable por $\{U_n/n\in N\}$ y existe U_p tal que

$[(H\cup\{m\})\times(H\cup\{m'\})]\cap U_p\subset(H\times H)\cap U_p$, para todo $m,m'\in V^b$, se tiene que para todo $U\in\mathcal{U}$ existe U_n tal que para $m,m'\in V^b$ se verifica que $[(H\cup\{m\})\times(H\cup\{m'\})]\cap U_n\subset(H\times H)\cap U_n\subset U$, de donde se deduce que la familia $\mathcal{H}=\{H\cup\{m\}/m\in V^b\}$ es equimetrizable uniformemente por medio de $\mathcal{U}_0$. □

§ 3 - Aplicaciones multívocas uniformemente contínuas, semi-uniformemente contínuas inferiormente y c-semi-uniformemente contínuas inferiormente

Proposición 1

Sea $(Y,\mathcal{U})$ un espacio uniforme y 2^Y la familia de subconjuntos no vacíos de Y.- Para todo recubrimiento uniforme $\mathcal{W}$ de $(Y,\mathcal{U})$ se considera $U_{\mathcal{W}}=\{(A,B)\in 2^Y\times 2^Y / A\subset Est(B,\mathcal{W}), B\subset Est(A,\mathcal{W})\}$ Entonces, $B^* = \{U_{\mathcal{W}}/\mathcal{W}$ es un recubrimiento uniforme de $(Y,\mathcal{U})\}$ es base de una uniformidad U^* de 2^Y.

Demostración

i) Para todo $U_{\mathcal{W}}\in B^*$, $\Delta^*\subset U_{\mathcal{W}}$.

Si $A\in 2^Y$, $(A,A)\in U_{\mathcal{W}}$ pues como $\mathcal{W}$ es recubrimiento uniforme de $(Y,\mathcal{U})$, $A\subset Est(A,\mathcal{W})$.

ii) Para todo $U_{\mathcal{W}}\in B^*$ es evidente que $U_{\mathcal{W}}^{-1}\in B^*$.

iii) Para todo $U_{\mathcal{W}_1}$, $U_{\mathcal{W}_2}\in B^*$, existe $U_{\mathcal{W}_3}\in B^*$ tal que $U_{\mathcal{W}_3}\subset U_{\mathcal{W}_1}\cap U_{\mathcal{W}_2}$.

Sean $\mathcal{W}_1=\{A_i/i\in I\}$ y $\mathcal{W}_2= B_j\}/j\in J\}$ recubrimientos uniformes de $(Y,\mathcal{U})$.- Supongamos $\mathcal{W}_3$ definido por $\mathcal{W}_3=\{A_i\cap B_j/A_i\in\mathcal{W}_1, B_j\in\mathcal{W}_2$ y $A_i\cap B_j\neq\emptyset\}$. Es claro que $\mathcal{W}_3$ es también un recubrimiento uniforme de $(Y,\mathcal{U})$, pues trivialmente es un recubrimiento de Y, y existe $V\in\mathcal{U}$ tal que $\{V[y]/y\in Y\}$ refina a $\mathcal{W}_3$.- En efecto, como $\mathcal{W}_1$ y $\mathcal{W}_2$ son recubrimientos uniformes de $(Y,\mathcal{U})$, existen V_1 y $V_2\in\mathcal{U}$ tales que $\{V_1[y]/y\in Y\}$ y $\{V_2[y]/y\in Y\}$ son refinamientos de $\mathcal{W}_1$ y $\mathcal{W}_2$ respectivamente.- Entonces, si consideramos $V=V_1\cap V_2\in\mathcal{U}$, $\{V[y]/y\in Y\}$ es un refinamiento de $\mathcal{W}_3$, y por tanto $\mathcal{W}_3$ un recubrimiento uniforme de $(Y,\mathcal{U})$.

Por otro lado $U_{\mathcal{W}_3}\subset U_{\mathcal{W}_1}\cap U_{\mathcal{W}_2}$, pues si $(A,B)\in U_{\mathcal{W}_3}$, como se verifica que $A\subset Est(B,\mathcal{W}_3)\subset Est(B,\mathcal{W}_1)$ y $B\subset Est(A,\mathcal{W}_3)\subset Est(A,\mathcal{W}_1)$, se tiene que $(A,B)\in U_{\mathcal{W}_1}$; De manera análoga se demuestra que $(A,B)\in U_{\mathcal{W}_2}$.

iv) Para todo $U_{\mathcal{W}}\in B^*$, existe $U_{\mathcal{W}'}\in B^*$ verificando que $U_{\mathcal{W}'}\cdot U_{\mathcal{W}'}\subset U_{\mathcal{W}}$.- Como $U_{\mathcal{W}}\in B^*$, existe $U\in\mathcal{U}$ tal que $\{U[y]/y\in Y\}$ es un refinamiento de $\mathcal{W}$.- Sea $U'\in\mathcal{U}$ simétrico con $U'.U'.U'.U'\subset U$ y consideramos el recubrimiento uniforme de $(Y,\mathcal{U})$ $\mathcal{W}'=\{U'[y]/y\in Y\}$. Entonces se verifica que $U_{\mathcal{W}'}\cdot U_{\mathcal{W}'}\subset U_{\mathcal{W}}$, pues si $(A,B)\in U_{\mathcal{W}'}\cdot U_{\mathcal{W}'}$, existe $C\in 2^Y$ tal que (A,C) y $(C,B)\in U_{\mathcal{W}'}$, por lo que $A\subset Est(B,\mathcal{W})$ y $B\subset Est(A,\mathcal{W})$ ya que $A\subset Est(C,\mathcal{W}')\subset Est(Est(B,\mathcal{W}'),\mathcal{W}')\subset Est(B,\mathcal{W})$ (4) y $B\subset Est(C,\mathcal{W}')\subset Est(A,\mathcal{W}'),\mathcal{W}')\subset Est(A,\mathcal{W})$.- Así, para todo $(A,B)\in U_{\mathcal{W}'}\cdot U_{\mathcal{W}'}$, como $A\subset Est(B,\mathcal{W})$ y $B\subset Est(A,\mathcal{W})$, tenemos que $(A,B)\in U_{\mathcal{W}}$.

Se notará por U^* la uniformidad de 2^Y definida por $U^*=\{M$ / existe $\mathcal{W}$ recubrimiento uniforme de $(Y,\mathcal{U})$ tal que $U_{\mathcal{W}}\subset M\}$. Si $U\in\mathcal{U}$, $\mathcal{W}=\{U[y]/y\in Y\}$ es un recubrimiento uniforme de $(Y,\mathcal{U})$ y $U_{\mathcal{W}}$ se designará por U^*. □

® i) Sea $B_1^*=\{U^*/U\in\mathcal{U}\}$.- Entonces, B_1^* es una base de U^* ya que $B_1^*\subset B^*\subset U^*$ y además, si $U_{\mathcal{W}}\in B^*$ y $U\in\mathcal{U}$ es tal que $\{U[y]/y\in Y\}$ es un refinamiento de $\mathcal{W}$, $U^*\in U_{\mathcal{W}}$ pues si $(A,B)\in U^*$, tenemos que $A\subset Est(B,\{U[y]/y\in Y\})\subset Est(B,\mathcal{W})$ y $B\subset Est(A,\{U[y]/y\in Y\})\subset Est(A,\mathcal{W})$.

ii) Sea $B_2^*=\{U^*/U\in\mathcal{U}$ y U es simétrico$\}$.- Entonces, B_2^* es una base de U^*:

Definición 2

Sean $(X,\mathcal{V})$ e $(Y,\mathcal{U})$ espacios uniformes y ϕ una aplicación multívoca de X en Y.- Se dice que ϕ es uniformemente contínua si $\phi:(X,\mathcal{V})\to(2^Y,U^*)$ es uniformemente contínua.

Proposición 3

Sean $(X,\mathcal{V})$ e $(Y,\mathcal{U})$ espacios uniformes y ϕ una aplicación multívoca de X en Y.- Las siguientes afirmaciones son equivalentes.

a) ϕ es uniformemente contínua.

b) Para todo $U\in\mathcal{U}$ el subconjunto V_U definido

$$V_U=\left\{(x,x')\in X\times X \;\middle|\; \begin{array}{l} \forall\, l\in\phi(x) \quad " \quad \phi(x')\cap U[l] \neq \emptyset \\ y \\ \forall\, l'\in\phi(x')" \quad \phi(x)\cap U[l'] \neq \emptyset \end{array}\right\}$$

es un elemento de $\mathcal{V}$.-

c) Para todo $U\in\mathcal{U}$ con U simétrico, se verifica que V_U es un elemento de $\mathcal{V}$.

Demostración

$(a\to b)$

Para todo $U\in\mathcal{U}$ existen $U'\in\mathcal{U}$ con $U'.U'\subset U$ y $V\in\mathcal{V}$ verificando que $(\phi\times\phi)(V)\subset U'^*$ -por ser ϕ uniformemente contínua- y que $V\subset V_u$.

En efecto, para todo $(x,y)\in V$ y todo $l\in\phi(x)$, se verifica que $1 \in \phi(x) \subset \mathrm{Est}\ (\phi(y),\ \{U'\ [y]\ / y \in Y\})$.- Así, como $1 \in U'\ [z]$ y existe $t \in U'\ [z] \cap \phi(y)$, $(1,t) \in U'.U' \subset U$, y por tanto $\phi(y) \cap U\ [1] \neq \emptyset$, pues $t \in \phi(y) \cap U\ [1]$.- De forma análoga se demuestra que si $(x,y) \in V$ y $1' \in \phi(y)$, $\phi(x) \cap U\ [1'] \neq \emptyset$.- Entonces, como $V \subset V_U$, V_U es un elemento de la uniformidad $\mathcal{V}$.

($b \Rightarrow c$) trivial.

($c \Rightarrow a$)

Para todo $M \in U^*$, existe $U \in \mathcal{U}$ simétrico, tal que $U^* \subset M$, y por hipótesis V_U es un elemento de $\mathcal{V}$.- Vamos a demostrar que para todo $(x,y) \in V_U$ se verifica que $(\phi(x),\phi(y)) \in U^*$.-

En efecto, si $(x,y) \in V_U$, para todo $1 \in \phi(x)$ se verifica que $\phi(y) \cap U\ [1] \neq \emptyset$, y para todo $1' \in \phi(y)$, $\phi(x) \cap U\ [1'] \neq \emptyset$.- Entonces, $\phi(x) \subset \mathrm{Est}(\phi(y),\ \{U\ [z]\ /\ z \in Y\})$ y $\phi(y) \subset \mathrm{Est}(\phi(x),\ \{U\ [z]\ /\ z \in Y\})$, por tanto, $(\phi \times \phi)\ (V_U) \subset U^* \subset M$, lo que implica que ϕ es uniformemente contínua. □

<u>Proposición 4</u>

Sean $(X,\mathcal{V})$ e $(Y,\mathcal{U})$ espacios uniformes, y ϕ una aplicación multívoca de X en Y.- Entonces, si $\phi: (X,\mathcal{V}) \to (2^Y, U^*)$ es uniformemente contínua, la aplicación $\phi: (X,T_{\mathcal{V}}) \to (Y,T_{\mathcal{U}})$ es semicontínua inferiormente.

<u>Demostración</u>

Sea $G \in T_{\mathcal{U}}$, entonces el conjunto $A = \{x \in X\ /\ \phi(x) \cap G \neq \emptyset\}$ es un elemento de $T_{\mathcal{V}}$, pues si $x_o \in A$, x_o es un punto interior de A.-

Supongamos $x_o \in A$, entonces $\phi(x_o) \cap G \neq \emptyset$ y para todo

$1 \in \phi(x_o) \cap G$, existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $U[1] = G$, $V_U \in \mathcal{V}$ por hipótesis y $V_U[x_o] \subset A$.- En efecto, si $x \in V_U[x_o]$, como $\phi(x) \cap U[1] = \phi(x) \cap G$ y $\phi(x) \cap U[1] \neq \emptyset$, se tiene que $x \in A$, luego $V[x_o] \subset A$ de donde $A \in T_{\mathcal{V}}$.- □

Ejemplo 1

Sean $(X,\mathcal{V})$ e $(Y,\mathcal{U})$ espacios uniformes y $f: X \to Y$ una aplicación uniformemente contínua de $(X,\mathcal{V})$ en $(Y,\mathcal{U})$.- Entonces, la aplicación

$\phi_f: X \to 2^Y$

$x \to \phi_f(x) = \{f(x)\}$ es uniformemente contínua.

Es claro que para todo $U \in \mathcal{U}$ simétrico se verifica que

$$V_U = \left\{ (x,y) \in X \times X \middle/ \begin{array}{ll} \forall\, 1 \in \phi_f(x) & \phi_f(y) \cap U[1] \neq \emptyset \\ \text{y} & \\ \forall\, 1' \in \phi_f(y) & \phi_f(x) \cap U[1'] \neq \emptyset \end{array} \right\}$$

$$= \{(x,y) \in X \times X \ / \ (f(x), f(y)) \in U\} = (f \times f)^{-1}(U),$$

de donde V_U es un elemento de la uniformidad $\mathcal{V}$ por ser f uniformemente contínua, y por tanto ϕ es uniformemente contínua. □

El recíproco también es cierto, pues es evidente que si la aplicación ϕ_f es uniformemente contínua, la aplicación f es uniformemente contínua.

Ejemplo 2

Sea G un grupo topológico, H un subgrupo de G y $u: G \to G/H$ la proyección natural.- En G se considera la uniformidad por la derecha $\mathcal{U}_d$ que tiene por base $B_d = \{V_d / V \in B(e)\}$ donde $V_d = \{(x,y) \in G \times G \ / \ y \cdot x^{-1} \in V\}$, siendo e el elemento unidad de G.- En G/H se considera la uniformidad $\dot{\mathcal{U}}_d$ que tiene por base

$\dot{B}_d = \{\dot{V}_d / V \in B(\bar{e})\}$ (5) donde

$\dot{V}_d = \{(\bar{x},\bar{y}) \in G/H \times G/H \,/\, \exists t \in \bar{x} \text{ y } \exists z \in \bar{y} \text{ con } z.t^{-1} \in V\}$,

siendo $\bar{e}$ el elemento unidad de G/H.- La aplicación $u:(G,\mathcal{U}_d) \to (G/H,\dot{\mathcal{U}}_d)$ es uniformemente contínua y la aplicación

$$\phi_u : G/H \to G$$
$$\bar{x} \to \phi_u(\bar{x}) = u^{-1}(\bar{x})$$

es uniformemente contínua de $(G/H,\dot{\mathcal{U}}_d)$ en $(G,\mathcal{U}_d)$.

Como $(u \times u)(V_d) \subset \dot{V}_d$ para todo $\dot{V}_d \in \dot{B}_d$, la aplicación u es uniformemente contínua.- Por otro lado, para todo $U \in \mathcal{U}_d$ existe $V \in B(e)$ con $V_d \subset U$, tal que $\dot{V}_U \in \dot{\mathcal{U}}_d$ pues $\dot{V}_d \subset V_U$.- En efecto, de $(\bar{x},\bar{y}) \in \dot{V}_d$ y $a \in \phi_u(\bar{x}) = u^{-1}(\bar{x}) = \bar{x}$, se tiene que existen $t \in \bar{x}$, $z \in \bar{y}$ y $h \in H$ tales que $z.t^{-1} \in V$ y $a^{-1}.t = h$.- Entonces, $z.h^{-1} \in U[a]$ porque $(a,z.h^{-1}) \in V_d \subset U$, ya que $z.t^{-1} = z.h^{-1}.a^{-1}.\in V$.- Por otro lado, como $z.h^{-1} \in \bar{y} = \phi_u(\bar{y})$, se tiene que $\phi_u(\bar{y}) \cap U[a] \neq \emptyset$ con $a \in \phi_u(\bar{x})$.- De manera análoga se demuestra que si $(\bar{x},\bar{y}) \in \dot{V}_d$ y $a' \in \phi_u(\bar{y})$, $\phi_u(\bar{x}) \cap U[a'] \neq \emptyset$.- Así como $\dot{V}_d \subset V_U$, la aplicación ϕ_u es uniformemente contínua.- Además, $u:(G,T_{\mathcal{U}_d}) \to (G/H,T_{\dot{\mathcal{U}}_d})$ es una aplicación abierta y por tanto una identificación. □

<u>Proposición 5</u>

Sean $(X,\mathcal{V})$ y $(R,\mathcal{U}_u)$ espacios uniformes, $f:X \to R$ una aplicación y ϕ una aplicación multívoca de X en R definida por $\phi(x) = [f(x), \to)$ para todo $x \in X$.- Entonces, la condición necesaria y suficiente para que $\phi:(X,\mathcal{V}) \to (2^R, \mathcal{U}^*_u)$ sea uniformemente contínua, es que sea uniformemente contínua la aplicación f de $(X,\mathcal{V})$ en $(R,\mathcal{U}_u)$.

<u>Demostración</u>

Supongamos que f es uniformemente contínua.- Entonces, se verifica que para todo $U \in \mathcal{U}$ el conjunto V_U definido por

$$V_U = \left\{ (x,y) \in X \times X \middle/ \begin{array}{lll} \forall l \in \phi(x) & " & \phi(y) \cap U[l] \neq \emptyset \\ y & & \\ \forall l' \in \phi(y) & " & \phi(x) \cap U[l'] \neq \emptyset \end{array} \right\}$$

es un elemento de la uniformidad $\mathcal{V}$.

En efecto, para todo $U \in \mathcal{U}$ existe una banda U' de $\mathcal{U}$ con $U'.U' \subset U$.- Como f es uniformemente contínua, existe $V \in \mathcal{V}$ tal que $(f \times f)(V) \subset U$, para el cual se verifica que $V \subset V_U$.- Para demostrar que $V \subset V_U$, partimos de $(x,y) \in V$, $l \in \phi(x)$ y $l' \in \phi(y)$.- Por ser f(x) y f(y) elementos de R, se tiene que $f(x) \leqslant f(y)$ ó $f(y) \leqslant f(x)$.- Si $f(y) \leqslant f(x)$ ó $f(x) < f(y) \leqslant l$, es evidente que $\phi(y) \cap U[l] \neq \emptyset$, pues $l \in \phi(y)$.- Entonces, vamos a suponer que $f(x) \leqslant l < f(y)$.- Como U' es una banda de $\mathcal{U}$ y $(f(x), f(y)) \in U'$ por ser f uniformemente contínua, el par $(l, f(y))$ pertenece a U, luego $f(y) \in U[l]$ de donde se deduce que $\phi(y) \cap U[l] \neq \emptyset$. Se demuestra de manera análoga que $\phi(x) \cap U[l'] \neq \emptyset$.- Así, como $V \subset V_U$ y $V \in \mathcal{V}$, se tiene que $V_U \in \mathcal{V}$, y queda demostrado que ϕ es uniformemente contínua.

La condición es suficiente, pues si $\phi:(X,\mathcal{V}) \to (2^R, \mathcal{U}^*_u)$ es uniformemente contínua, para todo $U \in \mathcal{U}^*_u$ existe una banda U' de $\mathcal{U}^*_u$ con $U'.U' \subset U$ tal que $(f \times f)(V_{U'}) \subset U$.-

En efecto, para todo $U\in \mathcal{U}^*_u$ existe U' banda de $\mathcal{U}^*_u$ con $U'.U'\subset U$ tal que $V_{U'}\subset V_{U}$, y por ser ϕ uniformemente contínua, $V_{U'}\in \mathcal{V}$.- Supongamos $(x,y)\in V_{U'}$, por ser $f(x)$, $f(y)\in R$ se verifica que $f(x)<f(y)$, $f(y)<f(x)$ ó $f(x)=f(y)$.- Si $f(x)<f(y)$, como U' es una banda de $\mathcal{U}^*_u$ y ϕ uniformemente contínua, para todo $l\in\phi(x)$ y en particular para $l=f(x)$, se verifica que $\phi(y)\cap U'[l] \neq \emptyset$, de donde se deduce que $f(y)\in U'[f(x)]$ y por tanto que $(f(x),f(y))\in U'\subset U$. Si $f(x)<f(y)$ ó $f(x)=f(y)$, es claro que por un razonamiento análogo al anterior en el primer caso, y en el segundo de forma trivial, se verifica que $(f(x),f(y))\in U$.- Entonces, como $(f \times f)\ (V_{U'})\subset Y$, la aplicación f es uniformemente contínua. □

<u>Definición 6</u>

Sean $(X,\mathcal{V})$ e $(Y,\mathcal{U})$ espacios uniformes, U un elemento de la uniformidad $\mathcal{U}$, ϕ una aplicación multívoca de X en Y, $\{y_i/i\in I\}$ un subconjunto de puntos de $\bigcup_{x\in X}\phi(x)$ y $\{A_i/i\in I\}$ un recubrimiento uniforme de dimensión finita de $(X,\mathcal{V})$.- Se dice que $\{A_i,y_i\}_{i\in I}$ es una U-selección uniforme para ϕ, si para todo $i\in I$ y todo $x\in A_i$ se verifica que $\phi(x)\cap U[y_i] \neq \emptyset$.

<u>Definición 7</u>

Sean $(X,\mathcal{V})$ e $(Y,\mathcal{U})$ espacios uniformes, U y U' elementos de $\mathcal{U}$, ϕ una aplicación multívoca de X en Y, $\{A_i,y_i\}_{i\in I}$ una U-selección uniforme para ϕ, y $\{A'_j,y'_j\}_{j\in J}$ una U'-selección uniforme para ϕ.- Se dice que esta U'-selección uniforme está subordinada a la U-selección uniforme $\{A_i, y_i\}_{i\in I}$, si existe una partición $\{J_i/i\in I\}$ de J tal que

i) Para todo $i\in I$, $A_i = \bigcup_{j\in J_i} A'_j$.

ii) Para todo $i\in I$ y todo $j\in J_i$, se verifica que $y'_j\in U[y_i]$.

<u>Definición 8</u>

Sean $(X,\mathcal{V})$ e $(Y,\mathcal{V})$ espacios uniformes, y ϕ una aplicación multívoca de X en Y.- Se dice que ϕ es semi-uniformemente contínua inferiormente si

i) Para todo $U\in\mathcal{U}$, existe una U-selección uniforme para ϕ.

ii) Dados U y $U'\in\mathcal{U}$ con $U'.U'\subset U$ y $\{A_i, y_i\}_{i\in I}$ una U-selección uniforme para ϕ, existe $\{A'_j, y'_j\}_{j\in J}$ U'-selección uniforme para ϕ subordinada a la U-selección uniforme $\{A_i, y_i\}_{i\in I}$.

<u>Definición 9</u>

Sea $(X,\mathcal{V})$ un espacio uniforme, $(E,\mathcal{U})$ un espacio vectorial topológico localmente convexo, y ϕ una aplicación multívoca de X en E.- Se dice que ϕ es c-semi-uniformemente contínua inferiormente si

i) Para todo $U\in\mathcal{U}$, existe una U-selección uniforme para ϕ.

ii) Dado $U \in \mathcal{U}$ con $U[x]$ convexo para todo $x \in X$, $U' \in \mathcal{U}$ con U'simétrico y $U'.U' \subset U$, y $\{A_i, y_i\}_{i \in I}$ una U-selección uniforme para ϕ, existe una U'-selección uniforme para ϕ $\{A'_j, y'_j\}_{j \in J}$ que está subordinada a la U-selección uniforme $\{A_i, y_i\}_{i \in I}$.

Proposición 10

Sea $(X,\mathcal{V})$ un espacio uniforme, $(E,\mathcal{U})$ un espacio vectorial topológico localmente convexo, y ϕ una aplicación multívoca de X en E.- Entonces, si ϕ es una aplicación semi-uniformemente contínua inferiormente, se verifica que ϕ es c-semi-uniformemente contínua inferiormente. □

El recíproco en general no es cierto, pues existen aplicaciones multívocas c-semi-uniformemente contínuas inferiormente que no son semi-uniformemente contínuas inferiormente.

Ejemplo 3

Sean $(X,\mathcal{V})=(Y,\mathcal{U})=(R,\mathcal{U}_u)$ espacios uniformes,

$f: R \to R$

$x \to f(x)=E[x]+3$ y ϕ una aplicación multívoca de R en R definida por

$\phi : R \to 2^R$

$x \to \phi(x)=[f(x)-\frac{1}{2}, f(x)+\frac{1}{2}]$.- Entonces, ϕ es c-semi-uniformemente contínua inferiormente pero no es semi-uniformemente contínua inferiormente.-

Veamos que ϕ es c-semi-uniformemente contínua inferiormente.- En efecto:

a) Para todo $U \in \mathcal{U}_u$ existe $\{A_z, y_z\}_{z\in Z}$ U-selección uniforme para ϕ.- Sean $A_z=(z-1,z+1)$ e $y_z=z+2+\frac{1}{2}=z+3-\frac{1}{2}$ para todo $z\in Z$.- Como $\{A_z/z \in Z\}$ es un recubrimiento uniforme de dimensión finita de $(R, \mathcal{U}_u)$, $\{y_z/z \in Z\} \subset \bigcup_{x\in R} \phi(x)$, y para todo $z\in Z$ y todo $x\in A_z$ se tiene que $\phi(x) \cap U[y_z] \neq \emptyset$ porque $y_z \in \phi(x)$, se verifica que $\{A_z, y_z\}_{z\in Z}$ es una U-selección uniforme para ϕ.

b) Sea $U \in \mathcal{U}_u$ con $U[x]$ convexo para todo $x\in X$ y $\{A_i, y_i\}_{i\in I}$ una U-selección uniforme para ϕ.- Entonces, para todo $U' \in \mathcal{U}_u$ con $U'.U' \subset U$, existe $\{A_{(i,\lambda)}, y_{(i,\lambda)}\}_{(i,\lambda)\in J}$ U'-selección uniforme subordinada a $\{A_i, y_i\}_{i\in I}$.

Supongamos $\{A_{(i,\lambda)}/(i,\lambda) \in J\}$ un recubrimiento uniforme de dimensión finita de $(R, \mathcal{U}_u)$ que refina a $\{A_i/i\in I\}$, y tal que para todo $(i,\lambda) \in J$, o no existe ningún $z\in Z$ con $z \in A_{(i,\lambda)}$, o bien existe un único z con $z\in A_{(i,\lambda)}$.- Si $A_{(i,\lambda)}$ es tal que para algún z $A_{(i,\lambda)} \subset [z,z+1)$, se tiene que $\phi(x)=[z+3-\frac{1}{2}, z+3+\frac{1}{2}]$ y $\phi(x) \cap U[y_i] \neq \emptyset$ para todo $x\in A_{(i,\lambda)} \subset A_i$ y además para todo $i\in I$, ó bien existe $x\in A_{(i,\lambda)}$ con $y_i \in \phi(x)$ o bien para todo $x\in A_{(i,\lambda)}$ $y_i \notin \phi(x)$, y por tanto $y_i < z+3-\frac{1}{2}$ ó $z+3+\frac{1}{2} < y_i$.-

Para todo $(i,\lambda) \in J$ sea $y_{(i,\lambda)} \in R$ definido por

$$y_{(i,\lambda)} = \begin{cases} y_i & \text{si existe } x\in A_{(i,\lambda)} \text{ tal que } y_i \in \phi(x) \\ z+3-\frac{1}{2} & \text{si } \forall x\in A_{(i,\lambda)},\ y_i \notin \phi(x) \text{ e } y_i < z+3-\frac{1}{2} \\ z+3+\frac{1}{2} & \text{si } \forall x\in A_{(i,\lambda)},\ y_i \notin \phi(x) \text{ y } z+3+\frac{1}{2} < y_i \end{cases}$$

Si $A_{(i,\lambda)}=(z-a,z+b)$ con $a,b \in R^+$ a y $b \leq 1$, se tiene que

$$\phi(x)=\begin{cases} [z+2-½, & z+2+½] \quad \text{si } x \in (z-1,z) \\ [z+3-½, & z+3+½] \quad \text{si } x \in [z,z+b) \end{cases}$$

Por otro lado, y para todo $i \in I$, o bien existe $x \in A_{(i,\lambda)}$ tal que $y_i \in \phi(x)$ o para todo $x \in A_{(i,\lambda)}$ si $y_i \notin \phi(x)$, se tiene que $y_i < z+2-½$ ó $z+3+½ < y_i$.- Entonces, como para todo $x \in A_{(i,\lambda)} \subset A_i$ $\phi(x) \cap U[y_i] \neq \emptyset$ y $U[y_i]$ es convexo, se tiene que $z+3-½=z+2+½ \in U[y_i] \cap \phi(x)$.- Sea para todo $(i,\lambda) \in J$ $y_{(i,\lambda)}=z+3-½=z+2+½ \in U[y_i] \cap \phi(x)$.

Entonces, $\{A_{(i,\lambda)}, y_{(i,\lambda)}\}_{(i,\lambda) \in J}$ es una U'-selección uniforme para ϕ subordinada a $\{A_i, y_i\}_{i \in I}$ pues

i) $\{A_{(i,\lambda)} / (i,\lambda) \in J\}$ es un recubrimiento uniforme de dimensión finita de $(R,\mathcal{U}_u)$, que refina a $\{A_i / i \in I\}$ por definición.

ii) Si para todo $i \in I$ definimos $J_i = \{(i,\lambda) / A_{(i,\lambda)} \subset A_i\}$, $\{J_i / i \in I\}$ es una partición de J.

iii) $\{y_{(i,\lambda)} / (i,\lambda) \in J\} \subset \bigcup_{x \in R} \phi(x)$.

iv) Para todo $i \in I$ y todo $(i,\lambda) \in J_i$, como $y_{(i,\lambda)} \in \phi(x) \cap U[y_i]$ para todo $x \in A_{(i,\lambda)} \subset A_i$, se tiene que para todo $x \in A_{(i,\lambda)}$ $\phi(x) \cap U'[y_{(i,\lambda)}] \neq \emptyset$.

v) Para todo $i \in I$ y todo $(i,\lambda) \in J_i$, $y_{(i,\lambda)} \in U[y_i]$ por definición.-

Por tanto, esta aplicación multívoca ϕ es c-semi-uniformemente contínua inferiormente, y vamos a demostrar que no es semi-uniformemente contínua inferiormente.

a') Sea $U \in \mathcal{U}_u$ tal que $U[x] = (x-1,x+1) \cup \{E[x]+n/n > 1\}$ para todo $x \in R$, y sean $A_z = (z-1,z+1)$ e $y_z = z$ para todo $z \in Z$. Entonces, $\{A_z, y_z\}_{z \in Z}$ es una U-selección uniforme para ϕ, pues $\{A_z / z \in Z\}$ es un recubrimiento uniforme de dimensión finita de $(R, \mathcal{U}_u)$, $\{y_z / z \in Z\} \subset \bigcup_{x \in R} \phi(x)$ y para todo $x \in A_z$, $\phi(x) \cap U[y_z] \neq \emptyset$ porque $z+2$ ó $z+3$ pertenecen a $\phi(x) \cap U[z] = \phi(x) \cap U[y_z]$.

b') Sea $U' = B_{1/2}$ con $U'.U' \subset U$.- Veamos que cualquier $\{A_{(z,\lambda)}, y_{(z,\lambda)}\}_{(z,\lambda) \in J}$ U'-selección uniforme para ϕ, no está subordinada a la U-selección uniforme $\{A_z, y_z\}_{z \in Z}$. En efecto:

b'-1) Supongamos que para algún $z \in Z$, $A_{(z,\lambda)} = A_z$ e $y_{(z,\lambda)}$ es tal que para todo $(z,\lambda) \in J_Z$, $y_{(z,\lambda)} \in U[y_z]$.- Así, para todo $x \in A_{(z,\lambda)} = A_z$ se tiene que

$$\phi(x) = \begin{cases} [z+2-\tfrac{1}{2},\ z+2+\tfrac{1}{2}] & \text{si} \quad x \in (z-1,z) \\ [z+3-\tfrac{1}{2},\ z+3+\tfrac{1}{2}] & \text{si} \quad x \in [z,z+1) \end{cases}$$

y $\phi(x) \cap U'[y_{(z,\lambda)}] \neq \emptyset$.- Como $y_{(z,\lambda)} \in U[y_z] = (z-1,z+1) \cup \{z+n \mid n > 1\}$ se pueden presentar los siguientes casos:

i) $y_{(z,\lambda)} \in (z-1,z+1)$.- Entonces, como $U'[y_{(z,\lambda)}] \subset (z-\frac{3}{2}, z+\frac{3}{2})$ y $\phi(x) \subset [z+\frac{3}{2}, z+\frac{7}{2}]$ para todo $x \in A_{(i,\lambda)}$, se verifica que $\phi(x) \cap U'[y_{(z,\lambda)}] = \emptyset$ para todo $x \in A_{(x,\lambda)}$.

ii) $y_{(z,\lambda)} = z+2$ Entonces, existe $x \in A_{(z,\lambda)}$ con $z < x < z+1$ tal que $\phi(x) \cap U'\, y_{(z,\lambda)} = \emptyset$ pues $\phi(x) = [z+3-\frac{1}{2}, z+3+\frac{1}{2}]$ y $[U'\, y_{(z,\lambda)}] = B_{1/2}\,(z+2) = (z+\frac{3}{2}, z+\frac{5}{2})$.

iii) $y_{(z,\lambda)}=z+3$ Entonces existe $x\in A_{(z,\lambda)}$ con $z-1<x<z$ tal que $\phi(x)\cap U'[y_{(i,\lambda)}]=\emptyset$ pues $\phi(x)=[z+2-\frac{1}{2},\ z+2+\frac{1}{2}]$ y $U'[y_{(z,\lambda)}]=B_{\frac{1}{2}}(z+3)=(z+\frac{5}{2},z+\frac{7}{2})$.

iv) $y_{(z,\lambda)}=z+n$ con $n\geq 4$.- Entonces, para todo $x\in A_{(z,\lambda)}$ se verifica que $\phi(x)\cap U'[y_{(z,\lambda)}]=\emptyset$ pues $\phi(x)\subset[z+2-\frac{1}{2},\ z+3+\frac{1}{2}]$ para todo $x\in A_{(z,\lambda)}$, y para todo $n>4$ $U'\ y_{(z,\lambda)}=$ $=B_{\frac{1}{2}}(z+n)\subset(z+4-\frac{1}{2}\ \rightarrow)$.

b'-2) Supongamos que existen z y (z,λ) tal que $A_z\neq A_{(z,\lambda)}$. Entonces, existe $(z,\lambda_1)\in J_z$ tal que $z\in A_{(z,\lambda_1)}\subset A_z$ e $y_{(z,\lambda_1)}\in U[y_z]=U[z]$.- Por otro lado, existen y e y' pertenecientes a $A_{(z,\lambda_1)}$ con $y<z<y'$.- Por un razonamiento análogo al de b'-1, se demuestra que existe $x'\in A_{(z,\lambda_1)}$ tal que $\phi(x')\cap U'[y_{(z,\lambda_1)}]=\emptyset$, de donde se deduce que todo $B_{\frac{1}{2}}$-selección uniforme para ϕ no está subordinada a la U-selección uniforme para $\phi\ \{A_z,y_z\}_{z\in Z}$, y por tanto ϕ no es semi-uniformemente contínua inferiormente. □

Definición 11

Sean $(X,\mathcal{V})$ y $(R,\mathcal{U}_u)$ espacios uniformes y $f:X\rightarrow R$ una aplicación.- Se dice que f es débilmente uniformemente contínua de $(X,\mathcal{V})$ en $(R,\mathcal{U}_u)$, si para todo $U\in\mathcal{U}_u$ existe $V\in\mathcal{V}$ tal que para todo $x\in X$ existe $y_x\in R$ verificando que para todo $z\in V[x]$, $[f(z),\rightarrow)\cap U[y_x]\neq\emptyset$.

Ejemplo 4

Sean $(X,\mathcal{V})$ y $(R,\mathcal{U}_u)$ espacios uniformes, y $f:X\to R$ una aplicación uniformemente contínua. Entonces, f es débilmente uniformemente contínua de $(X,\mathcal{V})$ en $(R,\mathcal{U}_u)$.-

Para todo $\varepsilon>0$ existe $U_{\varepsilon/2}\in\mathcal{U}_u$ banda con $U_{\varepsilon/2}\subset U_{\varepsilon}$, y como f es uniformemente contínua, existe $V\in\mathcal{V}$ tal que $(f\times f)(V)\subset U_{\varepsilon/2}$. Sea $y_x=f(x)-\frac{\varepsilon}{2}$ para todo $x\in X$.- Entonces, para todo $z\in V[x]$ se verifica que $(f(x),f(z))\in U_{\varepsilon/2}$ y $f(z)\in[f(z),\to)\cap U_{\varepsilon}[y_x]$, pues $|f(z)-y_x|=|f(z)-f(x)+\frac{\varepsilon}{2}|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$.- Así, para todo $z\in V[x]$ se tiene que $[f(z),\to)\cap U_{\varepsilon}[y_x]\neq\emptyset$. □

Ejemplo 5

Sean $(X,\mathcal{V})=(Y,\mathcal{W})=(R,\mathcal{U}_u)$ y $f:R\to R$ una aplicación creciente.- Entonces, f es débilmente uniformemente contínua de $(R,\mathcal{U}_u)$ en $(R,\mathcal{U}_u)$.

Para todo $\varepsilon>0$ existen $\delta=\varepsilon>0$ y para todo $x\in X$, $y_x=f(x+\varepsilon)-\frac{\varepsilon}{2}\in R$.- Además, para todo $z\in V_{\delta}[x]$ se verifica que $f(z)\leq y_x$ ó $y_x<f(z)$.- Entonces, para todo $z\in V_{\delta}[x]$ se verifica que $[f(z),\to)\cap U_{\varepsilon}[y_x]\neq\emptyset$; pues si $y_x<f(z)$ porque $|f(z)-y_x|=f(z)-y_x\leq f(x+\varepsilon)-f(x+\varepsilon)+\frac{\varepsilon}{2}=\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$, y en caso de ser $f(z)\leq y_x$ porque $y_x\in[f(z),\to)$. □

Ejemplo 6

Sean $(R^+,\mathcal{U}_u|_{R^+\times R^+})$ y $(R,\mathcal{U}_u)$ espacios uniformes.- La aplicación

$$f:R^+\to R,\quad x\to f(x)=\frac{1}{x}$$

no es débilmente uniformemente contínua.

Sea $U=B_1=\{(x,y)\in R\times R/ \mid x-y\mid <1\}$.- Entonces, para todo $\delta>0$, existe $x=\frac{\delta}{2}\in R^+$ tal que para todo $y_x\in R$ existe $z\in V_\delta[x]$ con $0<z<\frac{\delta}{2}$ verificando que $f(z)>y_x+1$, y por tanto $[f(z),\rightarrow)\cap U[y_x]=\emptyset$ □

Proposición 12

Sea $(X,\mathcal{V})$ un espacio uniformente débilmente de dimensión finita, $(R,\mathcal{U}_u)$ un espacio uniforme y $f:X\rightarrow R$ una aplicación débilmente uniformemente contínua. Entonces, la aplicación multívoca ϕ de X en $\bar{R}$ definida para todo $x\in X$ por $\phi(x)=[f(x),\rightarrow)$, es c-semi-uniformemente contínua inferiormente.

Demostración

a) Para todo $U\in\mathcal{U}_u$ existe $\{A_i,y_i\}_{i\in I}$ U-selección uniforme para ϕ.-

Como f es débilmente uniformemente contínua, para todo $U\in\mathcal{U}_u$ existe $V\in\mathcal{V}$ tal que para todo $x\in X$ existe $y_x\in R$ verificando que para todo $z\in V[x]$, $\phi(z)\cap U[y_x]\neq\emptyset$.- Entonces, $\{V[x]/x\in X\}$ que es un recubrimiento uniforme, tiene un refinamiento uniforme $\{A_i/i\in I\}$ de dimensión finita por ser $(X,\mathcal{V})$ espacio uniforme débilmente de dimensión finita.- Así, para todo $i\in I$ existe x_i e y_{x_i} con $A_i\subset V[x_i]$ tales que para $z\in A_i$, $\phi(z)\cap U[y_{x_i}]\neq\emptyset$.- Sea $y_i=y_{x_i}$ para todo $i\in I$. Entonces, $\{A_i,y_i\}_{i\in I}$ es una U-selección uniforme para ϕ, pues $\{A_i/i\in I\}$ es un recubrimiento uniforme de $(X,\mathcal{V})$ de dimensión finita, y por otro lado para todo $z\in A_i$ se tiene que $\phi(z)\cap U[y_i]\neq\emptyset$, pues como $z\in A_i\subset V[x_i]$ y además $y_i=y_{x_i}$, se verifica que $\phi(z)\cap U[y_{x_i}]=\phi(z)\cap U[y_i]\neq\emptyset$.

b) Sea $U \in \mathcal{U}_u$ tal que $U[x]$ es convexo para todo $x \in X$ y $U' \in \mathcal{U}_u$ con $U'.U' \subset U$.- Si $\{A_i, y_i\}_{i \in I}$ es una U-selección uniforme para ϕ, existe $\{A_{(i,\lambda)}, y_{(i,\lambda)}\}_{(i,\lambda) \in J}$ U'-selección uniforme para ϕ subordinada a $\{A_i, y_i\}_{i \in I}$.

Sea $U'' \in \mathcal{U}_u$ una banda abierta o cerrada tal que $U'' \subset U'$.- Como f es débilmente uniformemente contínua, existe $V \in \mathcal{V}$ tal que para todo $x \in X$ existe $y_x \in R$ verificando que para todo $z \in V[x]$, $\phi(z) \cap U''[y_x] \neq \emptyset$.- Como $\{V[x]/x \in X\}$ es un recubrimiento uniforme del espacio $(X, \mathcal{V})$ débilmente de dimensión finita, existe un refinamiento uniforme $\{G_\lambda / \lambda \in \Lambda\}$ de él de dimensión finita, tal que si $J = \bigcup_{i \in I} J_i$ con $J_i = \{(i,\lambda)/A_i \cap G_\lambda \neq \emptyset\}$ y $A_{(i,\lambda)} = A_i \cap G_\lambda$ para todo $(i,\lambda) \in J$, $\{A_{(i,\lambda)}/(i,\lambda) \in J\}$ es un refinamiento uniforme de $\{V[x]/x \in X\}$.- Entonces, para todo $(i,\lambda) \in J$, existe $x_\lambda \in X$ e $y_{x_\lambda} \in R$ tales que $y_{x_\lambda} \in U[y_i]$ ó $y_{x_\lambda} \notin U[y_i]$, $A_{(i,\lambda)} \subset V[x_\lambda]$, y además para todo $z \in A_{(i,\lambda)}$, $\phi(z) \cap U''[y_{x_\lambda}] \neq \emptyset$.

Si $y_{x_\lambda} \notin U[y_i]$, como $y_{x_\lambda} \neq y_i$ e $y_{x_\lambda}, y_i \in R$, se tiene que $y_{x_\lambda} < y_i$ ó $y_i < y_{x_\lambda}$.-

a_1) Si $y_{x_\lambda} < y_i$ y para todo $z \in A_{(i,\lambda)}$ $f(z) \leq y_i$ se tiene que $y_i \in \phi(z)$ para todo $z \in A_{(i,\lambda)}$.- Si $y_{x_\lambda} < y_i$ y existe algún $z \in A_{(i,\lambda)}$ tal que $y_i < f(z)$, como $z \in V[x_\lambda]$ se verifica que $\phi(z) \cap U''[y_{x_\lambda}] \neq \emptyset$.- Por otro lado, como $y_{x_\lambda} < y_i < f(z)$ y U'' es una banda se tiene que $(y_{x_\lambda}, f(z)) \in U''$ e $(y_i, y_{x_\lambda}) \in U'' \subset U$, luego $y_{x_\lambda} \in U[y_i]$, lo que contradice la hipótesis de que $y_{x_\lambda} \notin U[y_i]$.- Así, si $y_{x_\lambda} < y_i$ e $y_{x_\lambda} \in U[y_i]$, para todo $z \in A_{(i,\lambda)}$ se tiene que $y_i \in \phi(z)$.

a_2) Si $y_i < y_{x_\lambda}$, supongamos $U \in \mathcal{U}_u$ tal que $U[y_i] \subset (y_i - \varepsilon, y_i + \varepsilon)$ y $U''_{\varepsilon'}$, banda con $\varepsilon' < \varepsilon$ y $\frac{\varepsilon}{n} < \varepsilon'$ para algún $n \geq 2$. Sea $y_{(i,\lambda)} = y_i + \frac{\varepsilon(n-1)}{n}$ como $y_{(i,\lambda)} > y_i$ e $y_{(i,\lambda)} - y_i \leq \frac{(n-1)}{n} < \varepsilon$ se tiene que $y_{(i,\lambda)} \in U[y_i]$.- Por otro lado, para todo $z \in A_{(i,\lambda)}$ se verifica que $\phi(z) \cap U[y_i] \neq \emptyset$ pues si $f(z) \leq y_{(i,\lambda)}$ porque $y_{(i,\lambda)} \in \phi(z)$; y si $y_{(i,\lambda)} \leq f(z)$, de ser z un elemento de A_i y $\{A_i, y_i\}_{i \in I}$ una U-selección uniforme para ϕ, se deduce que $\phi(z) \cap U[y_i] \neq \emptyset$ y como $U[y_i]$ es convexo, se tiene que $f(z) \leq y_i + \varepsilon$ pues $f(z) \in U[y_i]$.- Entonces, como

$$|f(z) - y_{(i,\lambda)}| = f(z) - y_{(i,\lambda)} < y_i + \varepsilon - y_i - \frac{\varepsilon(n-1)}{n} = \frac{\varepsilon}{n} < \varepsilon',$$

$\phi(z) \cap U''[y_{(i,\lambda)}] \neq \emptyset$ y por tanto $\phi(z) \cap U'[y_{(i,\lambda)}] \neq \emptyset$ para todo $z \in A_{(i,\lambda)}$.

Para todo $(i,\lambda) \in J$ elegimos $y_{(i,\lambda)}$ como sigue

$$y_{(i,\lambda)} = \begin{cases} y_{x_\lambda} & \text{si } y_{x_\lambda} \in U[y_i] \qquad (b_1) \\ y_i & \text{si } y_{x_\lambda} \notin U[y_i] \text{ e } y_i \in \phi(z)\ \forall z \in A_{(i,\lambda)} \qquad (b_2) \\ y_{(i,\lambda)} & \text{si } y_{x_\lambda} \notin U[y_i] \text{ y existe } z \in A_{(i,\lambda)} \text{ tal que } y_i \notin \phi(z) \qquad (b_3) \end{cases}$$

Entonces, $\{A_{(i,\lambda)}, y_{(i,\lambda)}\}_{(i,\lambda) \in J}$ es una U'-selección uniforme para ϕ, subordinada a $\{A_i, y_i\}_{i\ I}$ pues:

i) $\{A_{(i,\lambda)} / (i,\lambda) \in J\}$ es un recubrimiento uniforme de dimensión finita de $(X, \mathcal{V})$.

ii) $\{y_{(i,\lambda)} / (i,\lambda) \in J\} \subset \bigcup_{x \in X} \phi(x)$.

iii) $\{J_i / i \in I\}$ es una partición de J.

iv) Para todo $i \in I$, $A_i = \bigcup_{(i,\lambda) \in J_i} A_{(i,\lambda)}$.

v) Para todo $i \in I$ y todo $(i,\lambda) \in J_i$, $y_{(i,\lambda)} \in U[y_i]$.

vi) Para todo $z \in A_{(i,\lambda)}$ se verifica que
$\phi(z) \cap U'[y_{(i,\lambda)}] \neq \emptyset$.

En efecto:

(b_1) Para todo $z \in A_{(i,\lambda)}$, como $A_{(i,\lambda)} \subset V[x_\lambda]$ e $y_{(i,\lambda)} = y_{x_\lambda}$, se tiene que $\phi(z) \cap U''[y_{(i,\lambda)}] = \phi(z) \cap U''[y_{x_\lambda}] \neq \emptyset$ y por tanto $\phi(z) \cap U'[y_{(i,\lambda)}] \neq \emptyset$.

(b_2) Para todo $z \in A_{(i,\lambda)}$, como $y_{(i,\lambda)} = y_i$ y $A_{(i,\lambda)} \subset V[x_\lambda]$ se tiene que $\phi(z) \cap U'[y_{(i,\lambda)}] \neq \emptyset$.

(b_3) Por definición se verifica que $\phi(z) \cap U'[y_{(i,\lambda)}] \neq \emptyset$. □

<u>Corolario</u>

Sea $(X,\mathcal{V})$ un espacio uniforme débilmente de dimensión finita, $(R,\mathcal{U}_u)$ espacio uniforme y $f: X \to R$ una aplicación uniformemente contínua o creciente.- Entonces, la aplicación multívoca ϕ de X en R definida por $\phi(x) = [f(x), \to)$ para todo $x \in X$, es c-semi-uniformemente contínua inferiormente.

<u>Demostración</u>

Es consecuencia de la proposición anterior y de los ejemplos 5 y 6, respectivamente. □

En general, la aplicación definida en el corolario anterior no se puede asegurar que sea semi-uniformemente contínua inferiormente.-

Proposición 13

Sea $(X,\mathcal{V})$ un espacio uniforme débilmente de dimensión finita, $(Y,\mathcal{U})$ un espacio uniforme, y ϕ una aplicación multívoca de X en Y uniformemente contínua de $(X,\mathcal{V})$ en $(2^Y, \mathcal{U}^*)$.- Entonces, ϕ es semi-uniformemente contínua inferiormente.- Si $(Y,\mathcal{U})$ es un espacio vectorial topológico localmente convexo, ϕ es c-semi-uniformemente contínua inferiormente.-

Demostración

a) Para todo $U\in\mathcal{U}^*$, por ser ϕ uniformemente contínua,

$$V_U = \left\{ (x,y) \in X \times X \;\middle|\; \begin{array}{l} \forall\, l\in\phi(x) \quad '' \quad \phi(y)\cap U[l] \neq \emptyset \\ y \\ \forall\, l'\in\phi(y) \quad '' \quad \phi(x)\cap U[l'] \neq \emptyset \end{array} \right\}$$

pertenece a $\mathcal{V}$.- Como $\{V_U[x]/x\in X\}$ es un recubrimiento uniforme del espacio uniforme $(X,\mathcal{V})$ débilmente de dimensión finita, existe un refinamiento uniforme $\{A_i/i\in I\}$ de dimensión finita.- Así, para todo $i\in I$ existe x_i verificando que $A_i \subset V_U[x_i]$, y elegimos $y_i\in Y$ tal que $y_i\in\phi(x_i)$.- Entonces, $\{A_i, y_i\}_{i\in I}$ es una U-selección uniforme para ϕ, ya que $\{A_i/i\in I\}$ es un recubrimiento uniforme de dimensión finita de $(X,\mathcal{V})$, $\{y_i/i\in I\}\subset \bigcup_{x\in X}\phi(x)$ y además para todo $i\in I$ y todo $x\in A_i$ se verifica que $\phi(x)\cap U[y_i] \neq \emptyset$ porque $y_i\in\phi(x_i)$ y $(x,x_i)\in V_U$.

b) Sean U y $U'\in\mathcal{U}$ tales que $U'.U'\subset U$ y $\{A_i, y_i\}_{i\in I}$ es una U-selección uniforme para ϕ.- Por ser ϕ uniformemente

$$\text{contínua } V_{U'} = \left\{ (x,y) \in X \times X \;\middle/\; \begin{array}{l} \forall l \in \phi(x) \quad '' \quad \phi(y) \cap U'[l] \neq \emptyset \\ \text{y} \\ \forall l' \in \phi(y) \quad '' \quad \phi(x) \cap U'[l'] \neq \emptyset \end{array} \right\}$$

es un elemento de $\mathcal{V}$.- Sea $V \in \mathcal{V}$ simétrico tal que $V.V \subset V_{U'}$.- Como $(X,\mathcal{V})$ es un espacio uniforme débilmente de dimensión finita, existe $\{G_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$ refinamiento uniforme de dimensión finita del recubrimiento $\{V[x]/x\in X\}$.- Por ser $\mathcal{W}=\{A_i/i\in I\}$ y $\mathcal{W}'=\{G_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$ recubrimientos uniformes de $(X,\mathcal{V})$, existen V_1 y $V_2 \in \mathcal{V}$ tales que $\{V_1[x]/x\in X\}$ y $\{V_2[x]/x\in X\}$ son refinamientos uniformes de $\mathcal{W}$ y $\mathcal{W}'$ respectivamente.- Para todo $i\in I$, sea $J_i=\{(i,\lambda)/A_i \cap G_\lambda \neq \emptyset\}$ y $J= \bigcup_{i\in I} J_i$.- Si para todo $(i,\lambda)\in J$ se define $A_{(i,\lambda)}=A_i \cap G_\lambda$, se tiene que $\mathcal{W}''=\{A_{(i,\lambda)}/(i,\lambda)\in J\}$ es un recubrimiento uniforme de dimensión finita de $(X,\mathcal{V})$.- En efecto, por ser $\mathcal{W}$ y $\mathcal{W}'$ recubrimientos de dimensión finita de X, es evidente de $\mathcal{W}''$ también lo es.- Por otro lado, como $\{V_1[x]/x\in X$ y $\{V_2\ x\ /x\in X\}$ son refinamientos uniformes de $\mathcal{W}$ y $\mathcal{W}'$ respectivamente, $\{V'[x]/x\in X$ y $V'=V_1 \cap V_2\}$ es un refinamiento uniforme de $\{A_{(i,\lambda)}/(i,\lambda)\in J\}$, pues para todo $x\in X$ existe $(i_x,\lambda_x)\subset J_{i_x} \subset J$ tal que $V'[x]\subset A_{i_x} \cap G_{i_x} = A_{(i_x,\lambda_x)}$.- Además, como para todo $(i,\lambda)\in J$ se tiene que $A_i \cap G_\lambda \neq \emptyset$, existe $t_{(i,\lambda)} \in A_i \cap G_\lambda$, verificando que $\phi(t_{(i,\lambda)}) \cap U[y_i] \neq \emptyset$ y por tanto existe $y_{(i,\lambda)} \in \phi(t_{(i,\lambda)}) \cap U[y_i]$.

Es claro que $\{A_{(i,\lambda)}, y_{(i,\lambda)}\}_{(i,\lambda)\in J}$ es una U'selección uniforme para ϕ, ya que $\{A_{(i,\lambda)}/(i,\lambda)\in J\}$ es un recubrimiento uniforme de dimensión finita de $(X,\mathcal{V})$, $\{y_{(i,\lambda)}/(i,\lambda)\in J\}\subset \bigcup_{x\in X} \phi(x)$ por construcción y para todo $(i,\lambda)\in J$ y para todo $x\in A_{(i,\lambda)}$, como x y $t_{(i,\lambda)} \in A_{(i,\lambda)}=A_i \cap G_\lambda \subset V[x_\lambda]$, se tiene que $(x,\ t_{(i,\lambda)}) =$

$=(x,x_\lambda)\cdot(x_\lambda,t_{(i,\lambda)})\in V.V\subset V_{\mathcal{U}}$ y por ser $y_{(i,\lambda)}$ un elemento de $\phi(t_{(i,\lambda)})$, se verifica que $\phi(x)\cap U'[y_{(i,\lambda)}]\neq\emptyset$.

Por otro lado, $\{A_{(i,\lambda)},y_{(i,\lambda)}\}_{(i,\lambda)\in J}$ está subordinada a la U-selección uniforme para ϕ $\{A_i,y_i\}_{i\in I}$, porque la familia $\{J_i/i\in I\}$ es una partición de J tal que para todo $i\in I$, $A_i=\bigcup_{(i,\lambda)\in J_i} A_{(i,\lambda)}$ y para todo $i\in I$ y todo $(i,\lambda)\in J_i$ se tiene que $y_{(i,\lambda)}\in U[y_i]$ por construcción. □

<u>Corolario</u>

Sea $(X,\mathcal{V})$ un espacio uniforme débilmente de dimensión finita, $(R,\mathcal{U}_u)$ espacio uniforme; $f:X\to R$ una aplicación uniformemente contínua, y ϕ una aplicación multívoca de X en R definida por $\phi(x)=[f(x),\to)$ para todo $x\in X$.- Entonces, ϕ es semi-uniformemente contínua.

<u>Demostración</u>

Es consecuencia inmediata de la proposición anterior y de la proposición 5.- □

§ 4 - Teoremas principales

Lema 1

Sea $(X,\mathcal{V})$ un espacio uniforme, $(Y,\mathcal{U})$ un espacio vectorial topológico, S un subconjunto de $(Y,\mathcal{U})$ acotado y convexo, $\{A_i/i\in I\}$ un recubrimiento uniforme de dimensión finita de $(X,\mathcal{V})$, $\{p_i/i\in I\}$ una partición de la unidad equiuniformemente contínua subordinada a $\{A_i/i\in I\}$ e $\{y_i/i\in I\}$ un subconjunto de S.- Entonces

i) Existe $q\in\mathbb{N}$ tal que para todo $x\in X$ existe un subconjunto finita F_x de I con $card(F_x)\leq q$ y $p_i(x)=0$ para todo $i\in I-F_x$.

ii) Para todo $x\in X$, $\sum_{i\in I} p_i(x)\, y_i$ es un elemento de S.

iii) La aplicación $f:X\to S\subset Y$ definida por $f(x)=\sum_{i\in I} p_i(x)y_i$ para todo $x\in X$, es uniformemente contínua de $(X,\mathcal{V})$ en $(Y,\mathcal{U})$.

Demostración

Los apartados i) ii) son consecuencia inmediata de ser $\{A_i/i\in I\}$ un recubrimiento uniforme de dimensión finita de $(X,\mathcal{V})$, $\{p_i/i\in I\}$ una partición de la unidad equi-uniformemente contínua subordinada a él y S un subconjunto convexo.

iii) Del apartado ii) se deduce que f una aplicación con $f(x) \in S$ para todo $x \in X$.- Veamos que f es uniformemente contínua.- Dado $U \in \mathcal{U}$, existen V y W entornos de cero en Y, W simétrico y convexo, tales que el elemento de la uniformidad $U_V \in \mathcal{U}$ asociado a V está contenido en U y $W + \overset{2q}{\cdots\cdots} + W \subset V$.- Como S es un subconjunto acotado en $(Y,\mathcal{U})$, para W entorno de cero en Y existe $a \in R^+$ tal que $S \subset a.W$.- Por otro lado, por ser $\{p_i / i \in I\}$ una partición de la unidad equiuniformemente contínua, existe $V^* \in \mathcal{V}$ tal que para todo $(x,x') \in V^*$, como $|p_i(x) - p_i(x')| < \frac{1}{a}$ para todo $i \in I$, se tiene que

$$f(x)-f(x') = \sum_{i \in I} p_i(x)\, y_i - \sum_{i \in I} p_i(x')\, y_i =$$

$$= \sum_{i \in I} (p_i(x) - p_i(x'))\, y_i =$$

$$= \sum_{i \in F_x \cup F_{x'}} (p_i(x) - p_i(x'))\, y_i \in W + \overset{2q}{\cdots\cdots} + W \subset V$$

Así, se verifica que $(f \times f)(V) \subset U_V \subset U$, lo que prueba que f es uniformemente contínua.- □

Teórema 2

Sea $(X,\mathcal{V})$ un espacio uniforme, $(Y,\mathcal{U})$ espacio vectorial topológico localmente convexo, S un subconjunto acotado y convexo de $(Y,\mathcal{U})$ y ϕ una aplicación multívoca de X en Y, c-semi-uniformemente contínua inferiormente tal que $\{\phi(x)/x \in X\}$ es equimetrizable uniformemente por medio de $\mathcal{U}_0 \subset \mathcal{U}$, y $\phi(x)$ un subconjunto convexo y completo de S para todo $x \in X$.- Entonces, existe una aplicación $\bar{f}$ uniformemente contínua de $(X,\mathcal{V})$ $(Y,\mathcal{U})$ tal que $\bar{f}(x)\in\phi(x)$ para todo $x\in X$.

Demostración

Supongamos que la familia $\{\phi(x)/\ x\in X\}$ es equimetrizable uniformemente por medio de $\mathcal{U}_o\subset\mathcal{U}$ que tiene por base $\{U_n/n\in N\}$, donde U_n es el elemento de la uniformidad $\mathcal{U}$ asociado a W_n para todo n, y W_n es un entorno de cero en Y abierto simétrico y convexo con $W_{n+1}+W_{n+1}\subset W_n$ para todo n.

La aplicación multívoca ϕ es c-semi-uniformemente contínua inferiormente por hipótesis, luego existe $\{A^1_i, y^1_i\}_{i\in I_1}$ U_1-selección uniforme para ϕ.- Así, como $\{A^1_i/i\in I_1\}$ es un recubrimiento uniforme de dimensión finita, por la proposición 1-1-pág. 108 de ON FINITE-DIMENSIONAL SPACES-J. ISBELL, existe una partición de la unidad equi-uniformemente contínua $\{p^1_i/i\in I\}$ subordinada a él.- Como $\{y^1_i/i\in I\}$ es un subconjunto de $\bigcup_{x\in X}\phi(x)\subset S$, por el lema anterior se deduce que la aplicación

$$\begin{aligned} f_1: X &\to S\subset Y \\ x &\to f_1(x)=\sum_{i\in I_1} p^1_i(x)\ y^1_i \end{aligned}$$

es uniformemente contínua de $(X,\mathcal{V})$ en $(Y,\mathcal{U})$.- Por otro lado, esta aplicación verifica que $f_1(x)\in U_1[\phi(x)]$ para todo $x\in X$.- En efecto, para todo $i\in I_1$ y todo $x\in A^1_i$, se tiene que $\phi(x)\cap U_1[y^1_i]\neq\emptyset$ por lo que existe $y^1_{(i,x)}\in\phi(x)\cap U_1[y^1_i]$.

Por ser $\phi(x)$ convexo, el elemento $y=\sum_{i\in I_1} p^1_i(x).y^1_{(i,x)}=$

$= \sum_{\substack{i \in I_1 \\ x \in A_i^1}} p_i^1(x)\, y^1_{(i,x)}$ pertenece a $\phi(x)$, y como W_1 es convexo, se tiene que $f_1(x) - y = \sum_{i \in I_1} p_i^1(x) y_i^1 - \sum_{i \in I_1} p_i^1(x) y^1_{(i,x)} =$

$= \sum_{i \in I_1} p_i^1(x)\, (y_i^1 - y^1_{(i,x)}) \in W_1$ por lo que $(f_1(x), y) \in U_1$, de donde se deduce que $f_1(x) \in U_1\ [\phi(x)]$.

Por ser $U_1[x]$ convexo para todo $x \in X$, $U_2 \in U$ con $U_2 . U_2 \subset U_1$ y ϕ c-semi-uniformemente contínua inferiormente, existe $\{A_i^2, y_i^2\}_{i \in I_2}$ U_2-selección uniforme para ϕ subordinada a $\{A_i^1, y_i^1\}_{i \in I_1}$.- Entonces, existe una partición $\{I_2^i / i \in I_1\}$ de I_2 tal que para todo $i \in I_1$, $A_i^1 = \bigcup_{j \in I_2^i} A_j^2$ e $y_j^2 \in U_1\ [\,y_i^1]$ para todo $j \in I_2^i$.- Como $\{A_i^2 / i \in I_2\}$ es un refinamiento uniforme de $\{A_i^1 / i \in I_1\}$, por el lema 6 - pág. 7 de UN TEOREMA DE SELECCION UNIFORME - J. FONTANILLAS, se deduce que existe una partición de la unidad equi-uniformemente contínua $\{p^2_i / i \in I_2\}$ subordinada a $\{A^2_i / i \in I_2\}$ verificando que $p^1_i(x) = \sum_{j \in I^i_2} p^2_j(x)$ para todo $i \in I_1$ y todo $x \in X$.-

Como $\{y^2_i / i \in I_2\}$ es un subconjunto de $\bigcup_{x \in X} \phi(x) \subset S$, por el lema anterior se deduce que la aplicación

$$\begin{aligned} f_2 : X &\to S \subset Y \\ x &\to f_2(x) = \sum_{i \in I_2} p^2_i(x)\, y^2_i \end{aligned}$$

es uniformemente contínua de $(X,\mathcal{V})$ en $(Y,\mathcal{U})$, y por el mismo razonamiento hecho para f_1, se tiene que $f_2(x)\in U_2[\phi(x)]$ para todo $x\in X$.-

Por otro lado, para todo $x\in X$ se verifica que $(f_2(x), f_1(x))\in U_1$.- En efecto, como W_1 es convexo y $\{p^2_i/i\in I_2\}$ una partición de la unidad, para todo $x\in X$ se tiene que

$$f_1(x) - f_2(x) = \sum_{i\in I_1} p^1_i(x)\, y^1_i - \sum_{i\in I_2} p^2_i(x)\, y^2_i =$$

$$= \sum_{i\in I_1}\left[\sum_{j\in J^i_2} p^2_j(x)\right] y^1_i - \sum_{i\in I_2} p^2_i(x)\, y^2_i =$$

$$= \sum_{\substack{j\in I^i_2\\ i\in I_1}} p^2_j(x)\,(y^1_i - y^2_j)\in W_1 \qquad (6),$$

de donde $(f_1(x), f_2(x))\in U_1$ para todo $x\in X$.

Procediendo por inducción, existe una sucesión $\{f_n/n\in N\}$ de aplicaciones uniformemente contínuas de $(X,\mathcal{V})$ en $(Y,\mathcal{U})$ tales que para todo $x\in X$ y todo n, $(f_n(x), f_{n+1}(x))\in U_n$ y para todo $n\in N-\{1\}$ y todo $x\in X$, $f_n(x)\in U_n[\phi(x)]$, lo que implica que $\phi(x)\cap U_{n-1}[f_n(x)]\neq\emptyset$ (7).- Así, para todo n se define una aplicación multívoca

$$\begin{aligned}\phi_n : X &\to 2^Y\\ x &\to \phi_n(x)=\phi(x)\cap U_{n-1}[f_n(x)]\end{aligned}$$

para todo $n>1$ y $\phi_1=\phi$.- La sucesión $\{\phi_n(x)/n\in N\}$ verifica que

i) Para todo $x \in X$ y todo n, $\phi_n(x) \subset \phi(x)$ por definición.

ii) Para todo $x \in X$ y todo n, $\phi_{n+1}(x) \subset \phi_n(x)$.- En efecto, si $z \in \phi_{n+1}(x) = \phi(x) \cap U_n\ [f_{n+1}(x)]$, se tiene que $z \in \phi(x)$ y $(f_n(x), z) = (f_n(x), f_{n+1}(x))$. $(f_{n+1}(x), z) \in U_n . U_n \subset U_{n-1}$, de donde $z \in \phi(x) \cap U_{n-1}\ [f_n(x)] = \phi_n(x)$.

iii) $\{\phi_n(x)/x \in N\}$ es base de filtro de Cauchy, F_x, en $\phi(x)$.- En efecto, como $\{\phi(x)/x \in X\}$ es equimetrizable uniforme por medio de $\mathcal{U}_o$, y por tanto equimetrizable por medio de U_o, para todo $U \in \mathcal{U}$ existe U_n tal que
$(\phi(x) \times \phi(x)) \cap U_n \subset U$ para todo $x \in X$, y además
$\phi_{n+2}(x) \times \phi_{n+2}(x) \subset [\phi(x) \times \phi(x)] \cap U_n \subset [\phi(x) \times \phi(x)] \cap U$ (8). Entonces, como $\phi(x)$ es completo, existe $\overline{f}(x) \in \lim F_x$ con $\overline{f}(x) \in \phi(x)$ para todo $x \in X$.

Basta probar que $\overline{f}$ es uniformemente contínua para terminar la demostración del teorema. Como $\{\phi(x)/x \in X\}$ es uniformemente equimetrizable por medio de $\mathcal{U}_o$, para todo $U \in \mathcal{U}$ existe $U_{n-2} \in \mathcal{U}_o$ tal que para todo $x, x' \in X$ se verifica que

$$[\phi(x) \times \phi(x')] \cap [U_{n-2} . U_{n-2} . U_{n-2}] \subset U.$$

Por ser f_n uniformemente contínua, existe $V \in \mathcal{V}$ tal que para todo $(x,x') \in V$, $(f_n(x), f_n(x')) \in U_{n-2}$.- Entonces, para todo $(x,x') \in V$ tal que $(f_n(x), f_n(x')) \in U_{n-2}$ se tiene que

$$\overline{f}(x) \in \overline{U_{n-1}\ [f_n(x)]} \subset U_{n-1}\ (U_{n-1}[f_n(x)]) =$$

$= U_{n-1} . U_{n-1}\ [f_n(x)] \subset U_{n-2}[f_n(x)]$ [Proposición VI-I-18 (b), pág. 324 - TOPOLOGIA I - M. GARCIA y otros], de donde se deduce que $(\overline{f}(x),\ f_n(x)) \in U_{n-2}$, y que $(\overline{f}(x'), f_n(x')) \in U_{n-2}$ por un razonamiento igual al anterior.- Así, para todo $(x,x') \in V$ se tiene que $(\overline{f}(x),\ \overline{f}(x')) =$

$$= (\overline{f}(x),\ f_n(x)).(f_n(x), f_n(x')).(f_n(x'), \overline{f}(x')) \in$$

$$\in (U_{n-2}.U_{n-2}.U_{n-2}) \cap (\phi(x) \times \phi(x')) \subset U,$$

y por tanto $(\overline{f} \times \overline{f})\ (V) \subset U$, lo que prueba que $\overline{f}$ es uniformemente contínua. □

Corolario 1

Sea $(X,\mathcal{V})$ un espacio uniforme debilmente de dimensión finita, $(Y,\mathcal{U})$ espacio vectorial topológico localmente convexo, S un subconjunto acotado y convexo de Y , y ϕ una aplicación multívoca de X en Y uniformemente contínua de $(X,\mathcal{V})$ en $(2^Y, \mathcal{U}^*)$ tal que $\phi(x)$ es un subconjunto convexo y completo de S para todo $x \in X$, y la familia $\{\phi(x)/x \in X\}$ es equimetrizable uniformemente por medio de $\mathcal{U}_o \subset \mathcal{U}$.- Entonces, existe una aplicación $\overline{f}$ uniformemente contínua de $(X,\mathcal{V})$ en $(Y,\mathcal{U})$ tal que $\overline{f}(x) \in \phi(x)$ para todo $x \in X$.-

Demostración

Es consecuencia de la proposición anterior y de la proposición 13 del §3.

Corolario 2

Sea $(X,\mathcal{V})$ un espacio uniforme con $\Delta d(X,\mathcal{V}) \leq n$,

$(Y,\mathcal{U})$ espacio vectorial topológico localmente convexo, S un subconjunto acotado y convexo de Y y ϕ una aplicación multívoca de X en Y uniformemente contínua de $(X,\mathcal{V})$ en $(2^Y, U^*)$, tal que $\phi(x)$ es un subconjunto convexo y completo de S para todo $x \in X$, y la familia $\{\phi(x)/x \in X\}$ es equimetrizable uniformemente por medio de $\mathcal{U}_o \subset \mathcal{U}$.- Entonces, existe una aplicación $\bar{f}$ uniformemente contínua de $(X,\mathcal{V})$ en $(Y,\mathcal{U})$ tal que $\bar{f}(x) \in \phi(x)$ para todo $x \in X$.

<u>Demostración</u>

Si $(X,\mathcal{V})$ es un espacio uniforme con $\Delta d(X,\mathcal{V}) \leqslant n$, es un espacio uniforme debilmente de dimensión finita. □

<u>Teorema 3</u>

Sea $(X,\mathcal{V})$ un espacio uniforme debilmente de dimensión finita (en particular $\Delta d(X,\mathcal{V}) \leq n$), $(Y,\mathcal{U})$ un espacio vectorial topológico localmente convexo, S un subconjunto de Y acotado, convexo, completo y metrizable, y ϕ una aplicación multívoca de X en Y c-semi-uniformemente contínua inferiormente, tal que $\phi(x)$ es un subconjunto cerrado y convexo de S para todo $x \in X$, y la familia $\{\phi(x)/x \in X\}$ equimetrizable uniformemente por medio de $\mathcal{U}_o \subset \mathcal{U}$.- Entonces, existe una aplicación $\bar{f}$ uniformemente contínua de $(X,\mathcal{V})$ en $(Y,\mathcal{U})$ tal que $\bar{f}(x) \in \phi(x)$ para todo $x \in X$.-

Demostración

Como $\phi(x)$ es cerrado en S para todo $x \in X$, $\phi(x)$ es completo.- Por otro lado, como S es metrizable, la familia $\{\phi(x)/x \in X\}$ es equimetrizable uniformemente por medio de $\mathcal{U}_o$ (observación pág. 23 § 2).- Así, por el teorema anterior, existe una aplicación uniformemente contínua $\bar{f}$ de $(X,\mathcal{V})$ en $(Y,\mathcal{U})$ que es una selección uniformemente contínua para ϕ. □

Corolario

Sea $(X,\mathcal{V})$ un espacio uniforme debilmente de dimensión finita (en particular $\Delta d(X,\mathcal{V}) \leq n$), $(Y,\mathcal{U})$ espacio vectorial topológico localmente convexo, S un subconjunto de Y acotado, convexo, completo y metrizable, y ϕ una aplicación multívoca de X en Y uniformemente contínua, y tal que $\phi(x)$ es un subconjunto cerrado y convexo de S para todo $x \in X$.- Entonces, existe una aplicación uniformemente contínua $\bar{f}$ de $(X,\mathcal{V})$ en $(Y,\mathcal{U})$ tal que $\bar{f}(x) \in \phi(x)$ para todo $x \in X$. □

Lema 4

Sea $(X,\mathcal{V})$ un espacio uniforme debilmente de dimensión finita, $(Y,\mathcal{U})$ un espacio uniforme, A un subconjunto de X, S un subconjunto de Y y $f: A \to S$ una aplicación uniformemente contínua de $(A,\mathcal{V}|_{A\times A})$ en $(S,\mathcal{U}|_{S\times S})$. Entonces, la aplicación multívoca ϕ de X en Y definida por

$$\phi(x) = \begin{cases} \{f(x)\} & \text{si } x\in A \\ S & \text{si } x\notin A \end{cases}$$

es semiuniformemente contínua inferiormente. Si $(Y,\mathcal{W})$ es un espacio vectorial topológico localmente convexo, la aplicación ϕ es c-semi-uniformemente contínua inferiormente.

Demostración

Supongamos que $A\neq X$, pues si A coincide con X, está demostrado en el Ejemplo 1 - §3 que ϕ es uniformemente contínua, y por tanto semi-uniformemente contínua (proposición 13 - §3).

Si $U\in\mathcal{U}$, como $f:A\to S$ es uniformemente contínua, existe $V\in\mathcal{V}$ verificando que $(f\times f)(V\cap(A\times A))\subset U$. Sea $V'\in\mathcal{V}$ simétrico con $V'.V'\subset V$.- Se define para todo $y\in S$ el subconjunto $U_y=\{x\in X/\ \phi(x)\cap U[y]\neq\emptyset\}=(X-A)\cup f^{-1}(U[y])$ (9) verificándose que $\{U_y/y\in S\}$ es un recubrimiento uniforme de $(X,\mathcal{V})$.- Es evidente que $\{U_y/y\in S\}$ es un recubrimiento de X por la definición de U_y, y por otro lado $\{V'[x]/x\in X\}$ es un refinamiento de él.- En efecto:

a_1) Si $a\in A$, se tiene que $y=f(a)\in S$ y $V'[a]\subset U_{f(a)}=U_y$. Sea $x\in V'[a]$.- Si $x\notin A$, como $x\in X-A$ se verifica que $x\in U_y$ para todo $y\in S$, y en particular para $y=f(a)$.- Si $x\in A$, como $(x,a)\in V'\cap(A\times A)\subset V\cap(A\times A)$, se tiene que $(f(x),f(a))\in U$, de donde se deduce que $x\in f^{-1}(U[f(a)])$, y por tanto

$x\in U_y=U_{f(a)}$.

a_2) Si $a\notin A$, se tiene que $a\in X-A$.

a_2-1) Supongamos que $V'[a]\cap A=\emptyset$.- Entonces, para todo $y\in S$ se verifica que $V'[a]\subset X-A\subset U_y$.

a_2-2) Si $V'[a]\cap A\neq\emptyset$, existe $a_1\in V'[a]\cap A$ y se verifica que $V'[a]\subset U_{f(a_1)}$.- Sea $x\in V'[a]$.- Si $x\notin A$, como $x\in X-A\subset U_y$ para todo $y\in S$, para $y=f(a_1)$ se tiene que $x\in U_y=U_{f(a_1)}$.- Si $x\in A$, como (x,a) y (a,a_1) pertenecen a V', se tiene que $(x,a_1)\in V\cap(A\times A)$ y $(f(x), f(a_1))\in U$, de donde se deduce que $x\in f^{-1}(U[a_1])$, y por tanto que $x\in U_y=U_{f(a_1)}$.

Como $(X,\mathcal{V})$ es un espacio uniforme debilmente de dimensión finita, el recubrimiento uniforme $\{U_y/y\in S\}$ tiene un refinamiento uniforme de dimensión finita $\{A_i/i\in I\}$.- Así, para cada $i\in I$ existe $y_i\in S=\bigcup_{x\in X}\phi(x)$ tal que $A_i\subset U_{y_i}$, de donde se deduce que para todo $x\in A_i$ se verifica que $\phi(x)\cap U[y_i]\neq\emptyset$.- Por tanto, $\{A_i,y_i\}_{i\in I}$ es una U-selección uniforme para ϕ.

Sean U y $U'\in\mathcal{U}$ con $U'.U'\subset U$ y $\{A_i,y_i\}_{i\in I}$ una U-selección uniforme para ϕ.- Veamos que existe $\{A_{(i,\lambda)}, y_{(i,\lambda)}\}_{(i,\lambda)\in J}$ U'-selección uniforme para ϕ subordinada a $\{A_i, y_i\}_{i\in I}$.- Por la continuidad uniforme de f, existe $V\in\mathcal{V}$ tal que $(f\times f)(V\cap(A\times A))\subset U'$.- Sea $V'\in\mathcal{V}$ simétrico tal que $V'.V'\subset V$.- Como $(X,\mathcal{V})$ es un espacio uniforme debilmente de dimensión finita, existe $\{G_\lambda/\lambda\in\Lambda\}$ refinamiento uniforme del recubrimiento

$\{V'[x]/x\in X\}$.- Así, para todo $\lambda\in\Lambda$, existe $x_\lambda\in X$ tal que $G_\lambda \subset V'[x_\lambda]$.- Sea $\{J_i/i\in I\}$ con $J_i=\{(i,\lambda)/A_i \cap G_\lambda \neq \emptyset\}$, una partición de J y $A_{(i,\lambda)}=A_i \cap G_\lambda$ para todo $(i,\lambda)\in J$.- Entonces, $\{A_{(i,\lambda)}/(i,\lambda)\in J\}$ es un recubrimiento uniforme de dimensión finita de $(X,\mathcal{V})$ por serlo $\{A_i/i\in I\}$ y $\{G_\lambda/ \lambda\in\Lambda\}$, verificando que $A_i=\bigcup_{(i,\lambda)\in J_i} A_{(i,\lambda)}$ para todo $i\in I$.-

Se define $y_{(i,\lambda)}$ para todo $(i,\lambda)\in J$ por

$$y_{(i,\lambda)} = \begin{cases} y_i & \text{si} \quad A_{(i,\lambda)} \cap A = \emptyset \\ f(x_{(i,\lambda)}) & \text{si} \quad A_{(i,\lambda)} \cap A \neq \emptyset \text{ y } x_{(i,\lambda)} \in A_{(i,\lambda)} \cap A \end{cases}$$

verificando que $y_{(i,\lambda)}\in U[y_i]$ para todo $(i,\lambda)\in J_i$ y todo $i\in I$.- En efecto, si $A_{(i,\lambda)}\cap A=\emptyset$, es evidente que $y_{(i,\lambda)}=y_i\in U[y_i]$.- Supongamos que $A_{(i,\lambda)}\cap A\neq\emptyset$, entonces, como $y_{(i,\lambda)}=f(x_{(i,\lambda)})$ con $x_{(i,\lambda)}\in A_{(i,\lambda)}\cap A\subset$ $\subset A_i\cap V'[x_\lambda]\cap A$, se tiene que $\phi(x_{(i,\lambda)})=\{y_{(i,\lambda)}\}$ y $\phi(x_{(i,\lambda)})\cap U[y_i]\neq\emptyset$, lo que implica que $y_{(i,\lambda)}\in U[y_i]$.

Por otro lado, para todo $x\in A_{(i,\lambda)}$ se verifica que $\phi(x)\cap U'[y_{(i,\lambda)}]\neq\emptyset$.- En efecto, si $A_{(i,\lambda)}\cap A=\emptyset$, como $y_{(i,\lambda)}=y_i$ y todo $x\in A_{(i,\lambda)}$ es un elemento que no pertenece a A, se tiene que $\phi(x)=S$, y por tanto $\phi(x)\cap U'[y_{(i,\lambda)}]\neq\emptyset$.- Supongamos $A_{(i,\lambda)}\cap A\neq\emptyset$, $y_{(i,\lambda)}=f(x_{(i,\lambda)})$ con $x_{(i,\lambda)}\in A_{(i,\lambda)}\cap A$ y $x\in A_{(i,\lambda)}$.- Si $x\notin A$ es evidente que $\phi(x)\cap U'[y_{(i,\lambda)}]\neq\emptyset$, pues $\phi(x)=S$ y $f(x_{(i,\lambda)})\in S\cap U'[y_{(i,\lambda)}]$.- Si $x\in A$, como $x\in A_i\cap V'[x_\lambda]$, se tiene que $(x,x_{(i,\lambda)})\in V\cap(A\times A)$, y por tanto

$(f(x),f(x_{(i,\lambda)})=(f(x),y_{(i,\lambda)})\in U'$.- Entonces, como $f(x)\in U'[y_{(i,\lambda)}]$ y $\phi(x)=\{f(x)\}$, se tiene que $\phi(x)\cap U'[y_{(i,\lambda)}]\neq\emptyset$.

Queda demostrado así que $\{A_{(i,\lambda)},y_{(i,\lambda)}\}_{(i,\lambda)\in J}$ es una selección uniforme para ϕ subordinada a la U-selección uniforme $\{A_i,y_i\}_{i\in I}$.- Así, la aplicación ϕ es semi-uniformemente contínua inferiormente. □

® La aplicación ϕ definida en el lema anterior, en general no es uniformemente contínua como lo demuestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1

Sea el espacio uniforme $(X,\mathcal{V})=(Y,\mathcal{U})=(R,\mathcal{U}_u)$, $A=(0,1)$, $S=[0,2]$, $f:A\to S$, $x\to f(x)=x$ aplicación uniformemente contínua en $(R,\mathcal{U}_u)$, y ϕ la aplicación multívoca de R en R definida por

$$\phi : R\to 2^S\subset 2$$
$$x\to \quad \phi(x)=\begin{cases}\{f(x)\} & \text{si} \quad x\in A\\ S & \text{si} \quad x\notin A\end{cases}$$

Por el lema anterior, ϕ es semi-uniformemente contínua inferiormente y en particular c-semi-uniformemente contínua inferiormente.- Sin embargo, dicha aplicación no es uniformemente contínua.-

Sea $U=B_{1/2}=\{(x,y)\in R\times R/(x-y)<\frac{1}{2}\}\in\mathcal{U}_u$ y

$$V_U = \left\{ (x,y) \in R \times R \;\middle|\; \begin{array}{l} \forall\, l \in \phi(x) \quad " \quad \phi(y) \cap U[l] \neq \emptyset \\ y \\ \forall\, l' \in \phi(y) \quad " \quad \phi(x) \cap U[l'] \neq \emptyset \end{array} \right\}$$.- El subconjunto V_U no pertenece a $\mathfrak{U}_u$.- En efecto:

a_1) Si $x,y \in A$ ó x e $y \notin A$, entonces $V_U \in \mathfrak{U}_u$.- Si $x,y \in A$ y $(x,y) \in U$, como $\phi(x)=\{x\}$ y $\phi(y)=\{y\}$, si $l \in \phi(x)$ se tiene que $\phi(y) \cap U[l] = \{y\} \cap U[x] \neq \emptyset$ y para todo $l' \in \phi(y)$, $\phi(x) \cap U[l'] \neq \emptyset$. Por tanto $U \in V_U$ y $V_U \in \mathfrak{U}_u$.- Si $(x,y) \in U$ y x e y no pertenecen a A como, $\phi(x)=\phi(y)=[0,2]$, se verifica trivialmente que $V_U \in \mathfrak{U}_u$.

a_2) Sean x e y con $x \in A$ e $y \notin A$ ó $x \notin A$ e $y \in A$.- En ambos casos $V_U \notin \mathfrak{U}_u$.- Si $x \in A$ e $y \notin A$, se tiene que $\phi(y)=[0,2]$, y existe $2 \in \phi(y)$ tal que $\phi(x) \cap U[2] = \{x\} \cap (2-\frac{1}{2}, 2+\frac{1}{2}) = \{x\} \cap (\frac{3}{2},\frac{5}{2}) = \emptyset$.- De forma análoga se razona si $x \notin A$ e $y \in A$.-

Así, la aplicación ϕ no es uniformemente contínua. □

<u>Teorema 5</u>

Sea $(X,\mathcal{V})$ un espacio uniforme debilmente de dimensión finita (en particular $\Delta d(X,\mathcal{V}) \leq n$), $(Y,\mathcal{U})$ un espacio vectorial localmente convexo, A un subconjunto de X, S un subconjunto de Y cerrado, acotado, convexo, completo y metrizable y $f: A \to S$ una aplicación uniformemente contínua de $(A,\mathcal{V}|_{A \times A})$ en $(S,\mathcal{U}|_{S \times S})$.- Entonces, existe una aplicación $\overline{f}$ uniformemente contínua que extiende a f.-

Demostración

Es consecuencia inmediata del lema anterior y del teorema 3. □

Corolario

Sea X un espacio compacto y regular, (compacto y T_2), A un subconjunto de X, $(Y,\mathcal{U})$ espacio vectorial topológico localmente convexo, S un subconjunto de Y cerrado, acotado, convexo, completo y metrizable y $f:A \to S$ una aplicación uniformemente contínua.- Entonces, existe una aplicación $\bar{f}$ uniformemente contínua que extiende a f. □

® Este resultado es falso, en general, si se supone f contínua en lugar de uniformemente contínua.- Continua siendo cierto con f contínua, si sobre A se hace la hipótesis de ser un subconjunto cerrado.

Sea S un subconjunto convexo y cerrado de un espacio de Banach E.- Entonces, si S además está acotado, es un extensor absoluto uniforme de la clase de los espacios uniformes de dimensión finita.- La hipótesis de ser S acotado, se puede rebajar si la extensión de f se hace a un entorno U de A en $(X,\mathcal{V})$ por el corolario 1 - pág. 750 - ON SELECTION AND EXTENSION OF UNIFORMLY CONTINUOUS MAPPINGS- G.M. NEPOMNJASCII. En nuestras hipótesis, tampoco se puede prescindir de ser S un subconjunto acotado, pues existe $(X,\mathcal{V})$ espacio uniforme debilmente de dimensión finita, $(Y,\mathcal{U})$ espacio vectorial topológico localmente convexo, S subconjunto de Y convexo, completo, cerrado y metrizable, y ϕ una aplicación multívoca de X en Y c-semi-uniformemente contínua inferiormente, para lo cual no existe una selección uniformemente contínua.

Ejemplo 2

Sea $(X,\mathcal{V})=(R^+,\mathcal{U}_u\big|_{R^+\times R^+})$ espacio uniforme debilmente de dimensión finita, $(Y,\mathcal{U})=(R,\mathcal{U}_u)$ espacio localmente convexo, S=R subconjunto de R convexo, completo, cerrado y metrizable pero no acotado, y ϕ una aplicación multívoca de R^+ en R definida por $\begin{array}{l}\phi : R^+ \to 2^R \\ x \to \phi(x)=[x^2, \to)\end{array}$.- La aplicación ϕ es c-semi-uniformemente contínua inferiormente, pero no admite una selección uniformemente contínua.

La aplicación ϕ no es uniformemente contínua, pues para $U=B_1=\{(x,y)\in R\times R/\ |x-y|<1\}$, el elemento

$$V_U=\left\{(x,y)\in R^+\times R^+ \middle/ \begin{array}{lll} \forall\, l\in\phi(x) & " & \phi(y)\cap B_1[l]\neq\emptyset \\ y & & \\ \forall\, l'\in\phi(y) & " & \phi(x)\cap B_1[l']\neq\emptyset \end{array}\right\} =$$

$$=\{(x,y)\in R^+\times R^+/\ |x^2-y^2|<1\}=\{(x,y)\in R^+\times R^+/\ |(x,y)|\,(x+y)<1\}$$

no pertenece a $\mathcal{U}_u\big|_{R^+\times R^+}$.

Por otro lado, ϕ es una aplicación c-semi-uniformemen te contínua inferiormente por el corolario de la proposición 12 §3; sin embargo, para esta aplicación ϕ no existe una aplicación $f: R^+ \to R$ uniformemente contínua tal que $f(x) \in \phi(x)$ para todo $x \in X$.- En efecto, supongamos que exista $f: R^+ \to R$ uniformemente contínua tal que $f(x) \in [x^2, \to)$ para todo $x \in X$.- Entonces, $f(x) \geq x^2$ para todo $x \in X$, y por tanto no existen constantes positivas a y b tales que $|f(x)| < a|x|+b$, lo que implica que no existe una aplicación $f: R^+ \to R$ uniformemente contínua de $(R^+, U_u|_{R^+ \times R^+})$ en (R, U_u) tal que $f(x) \geq x^2$ para todo $x \in R$ por el problema 75, pág. 19 - PROBLEMES DE TOPOLOGIE - J. CHAILLOU y J. HENRY. Por tanto, para esta aplicación multívoca ϕ que es c-semi-uniformemente contínua inferiormente, existe una aplicación uniformemente contínua verificando que $f(x) \in \phi(x)$ para todo $x \in R$. $\square$

(1) Por $U[x]$ se nota el conjunto $\{x' \in X/(x,x') \in U\}$.

(2) Las definiciones de espacio uniforme de dimensión finita y debilmente de dimensión finita se han tomado de J. ISBELL - ON FINITE - DIMENSIONAL UNIFORM SPACES.

(3) Un ejemplo de espacio vectorial topológico localmente convexo T_2 no es metrizable con una norma contínua se puede encontrar en el Capítulo III, pág. 64, de "THÉORIE DES DISTRIBUTIONS" L. SCHWARTZ.

(4) $A \subset Est(C,W') \subset Est(Est(B,W'),W') \in Est(B,W)$ ya que si

$x \in U'[y]$, $t \in U'[y] \cap U'[z]$ y $a \in U'[z] \cap B$, se tiene que $a \in U[x] \cap B$ pues $(x,a)=(x,y)(y,t)(t,z)(z.a) \in U'.U'.U'.U' \subset$ $\subset U$ y $a \in B$.- Por un razonamiento análogo se demuestra que $B \subset Est(C,W') \subset Est(Est(A,W') \subset Est(A,W)$.

(5) $\dot{U}_d$ tiene por base $\dot{B}_d=\{\dot{V}_d / V \in B(e)\}$ pues 1º) $\Delta \subset \dot{V}_d$ para todo $V \in B(e)$ ya que para todo $x \in X$ como $x.x^{-1}=$ $= e \in V$ se tiene que $(\bar{x},\bar{x}) \in \dot{V}_d$ 2º) $(V \cap U)_d \subset \dot{V}_d \cap \dot{U}_d$ 3) Para todo V sea $\dot{U}=V \cap V^{-1}$, entonces se verifica que $\dot{U}_d \subset \dot{V}_d^{-1}$ 4º) Si U es tal que $U.U \subset V$, se tiene que $\dot{U}_d . \dot{U}_d . \subset \dot{V}_d$.

(6) $f_1(x) - f_2(x) = \sum_{\substack{j \in I_2^i \\ i \in I_1}} p^2{}_j(x) \, (y_i^1 - y_j^2)$ pertenece a W_1 para todo $x \in X$, pues $y^1 - y_j^2 \in W_1$ porque $(y_j^1, y_j^2) \in U_1$ para todo $i \in I_1$ y todo $j \in I_2^i$ ya que $\{A_i^1, y_i^1\}_{i \in I_1}$ está subordinada a $\{A_j^2, y_j^2\}_{j \in I_2}$, $\sum_{j \in I_2} p^2{}_j(x)=1$ y W_1 es convexo.

(7) Que para todo $n \in N-\{1\}$ $f_n(x) \in U_n[(\phi(x)]$, implica que $\phi(x) \cap U_{n-1} [f_n(x)] \neq \emptyset$.- En efecto, como $f_n(x) \in U_n [\phi(x)]$, se verifica que $(f_n(x),y) \in U_n$ para algún $y \in \phi(x)$.- Por tanto $y \in \phi(x) \cap U_n [f_n(x)]$, de donde $\phi(x) \cap U_{n-1} [f_n(x)] \neq \emptyset$.

(8) Por ser $\{\phi(x)/x \in X\}$ equimetrizable por medio de $\mathcal{U}_0$,

$(\phi(x) \times \phi(x)) \cap U_n \subset U$ y

$\phi_{n+2}(x) \times \phi_{n+2}(x) \subset [\phi(x) \times \phi(x)] \cap U_n \subset [\phi(x) \times \phi(x)] \cap U$.- En efecto, si $(z,t) \in \phi_{n+2}(x) \times \phi_{n+2}(x)$, como $\phi_{n+2}(x) =$
$= \phi(x) \cap U_{n+1}[f_{n+2}(x)]$, se tiene que $(z,t) \in \phi(x) \times \phi(x)$
y $(z,t) \in U_{n+1} \cdot U_{n+1} \subset U_n$ pues $z \in U_{n+1}[f_{n+2}(x)]$ y
$t \in U_{n+1}[f_{n+2}(x)]$.- Por tanto,
$(z,t) \in [\phi(x) \times \phi(x)] \cap U_n \subset [\phi(x) \times \phi(x)] \cap U$.

(9) Si $y \in S$, entonces $U_y = \{x \in X / \phi(x) \cap U[y] \neq \emptyset\} =$
$= (X-A) \cup f^{-1}(U[y])$.- En efecto, si $x \in (X-A) \cup f^{-1}(U[y])$, se tiene que $x \in X-A$ o $x \in f^{-1}(U[y])$.- Cuando $x \in X-A$ es trivial que $x \in U_y$, pues como $\phi(x) = S$ se verifica que $y \in \phi(x) \cap U[y]$.- Si $x \in f^{-1}(U[y])$ y $x \notin X-A$, como $x \in A$ se tiene que $\phi(x) = \{f(x)\}$ y $f(x) \in U[y]$.- Así, $f(x) \in \phi(x) \cap U[y]$ y por tanto $x \in U_y$.- Recíprocamente: Sea $x \in U_y$, entonces se verifica que $\phi(x) \cap U[y] \neq \emptyset$.- Si $x \in X-A$ es trivial que $U_y \subset (X-A) \cup f^{-1}(U[y])$.- Supongamos $x \in A$, entonces como $\phi(x) = \{f(x)\} \subset U[y]$, se tiene que $x \in f^{-1}(U[y])$, y por tanto $U_y \subset (X-A) \cup f^{-1}(U[y])$.

CAPITULO III

CAPITULO III

SELECCIONES UNIFORMEMENTE CONTINUAS EN ESPACIOS UNIFORMES DE DIMENSION CERO

Lema 1

Sea $(X,\mathcal{V})$ un espacio uniforme de dimensión cero (1), (Y,d) un espacio métrico completo, y ϕ una aplicación multívoca de X en Y semi-uniformemente contínua inferiormente.- Entonces:

a) Para todo $U\in\mathcal{U}_d$, existe una U-Selección uniforme para ϕ $\{A_i,y_i\}_{i\in I}$ tal que $A_i \cap A_{i'} = \emptyset$ para todo $i, i'\in I$ si $i \neq i'$.

b) La aplicación $f:X \to Y$

$$x \to f(x)=y_i \text{ si } x\in A_i$$

es uniformemente contínua de $(X,\mathcal{V})$ en $(Y,\mathcal{U}_d)$.

Demostración

(a) Para todo $U\in\mathcal{U}_d$, como ϕ es semi-uniformemente contínua inferiormente, existe $\{B_j,y_j\}_{j\in J}$ U-Selección uniforme para ϕ.- Como $\{B_j/j\in J\}$ es un recubrimiento uniforme de $(X,\mathcal{V})$ espacio uniforme de dimensión cero, existe $\{A_i/i\in I\}$ refinamiento de $\{B_j/j\in J\}$ tal que $A_i \cap A_{i'} = \emptyset$ para todo $i,i'\in I$.- Luego, para todo $i\in I$ existe $j\in J$ tal que $A_i \subset B_j$.- Para todo $i\in I$, tomamos $y_i=y_j$ si $A_i \subset B_j$.- Entonces, $\{A_i,y_i\}_{i\in I}$ es una U-Selección uniforme para ϕ, pues $\{A_i/i\in I\}$ es un recubrimiento uniforme de dimensión finita $(X,\mathcal{V})$ y para todo $x\in A_i$ se verifica que $\phi(x) \cap U[y_i] \neq \emptyset$, porque $\phi(x) \cap U[y_i] = \phi(x) \cap U[y_j] \neq \emptyset$, ya que

$x \in A_i \subset B_j$.-

(b) La aplicación f está bien definida, pues para todo $x \in X$ existe un único $i \in I$ tal que $x \in A_i$.- Además, f es uniformemente contínua.- En efecto, para todo $U \in \mathcal{U}_d$ como $\{A_i / i \in I\}$ es un recubrimiento uniforme, existe $V \in \mathcal{V}$ tal que $\{V[x] / x \in X\}$ es un refinamiento de $\{A_i / i \in I\}$.- Entonces, para todo $(x,y) \in V$ se tiene que $f(x)=f(y)=y_i$ porque existe $i \in I$ tal que $y \in V[x] \subset A_i$, por tanto $(f x f)(V) \subset U$ de donde f es uniformemente contínua.- □

Lema 2

Sea $(X,\mathcal{V})$ un espacio uniforme de dimensión cero, (Y,d) espacio métrico completo, ϕ una aplicación multívoca de X en Y semi-uniformemente contínua, $\{A_i, y_i\}_{i \in I}$ una U-Selección uniforme para ϕ, tal que $A_i \cap A_{i'} = \emptyset$ para todo $i, i' \in I$ si $i \neq i'$, y $U' \in \mathcal{U}_d$ con $U'.U' \subset U$.- Entonces, existe $\{A''_j, y''_j\}_{j \in J}$ U'-Selección uniforme para ϕ subordinada a $\{A_i, y_i\}_{i \in I}$ verificando que $A''_j \cap A''_{j'} = \emptyset$ para todo $j, j' \in J$ si $j \neq j'$.

Demostración

Como ϕ es semi-uniformemente contínua inferiormente, dada la U-Selección uniforme para ϕ $\{A_i y_i\}_{i \in I}$, existe una U'-Selección uniforme para ϕ $\{A'_k, y'_k\}_{k \in K}$ subordinada a ella.- Por ser $\{A'_k \mid k \in K\}$ recubrimiento uniforme de $(X,\mathcal{V})$ espacio uniforme de dimensión cero, existe $\{A''_j / j \in J\}$ refinamiento de él de elementos disjuntos dos a dos.- Así, para todo $j \in J$ existen $k \in K$ e $i \in I$ tal que $A''_j \subset A'_k \subset A_i$.- Si para todo $j \in J$ se define $y''_j = y'_k$ si $A''_j \subset A'_k$, es claro que $\{A''_j, y''_j\}_{j \in J}$ es una U'-Selección uniforme para ϕ subordinada a $\{A_i, y_i\}_{i\in I}$, verificando que $A''_j \cap A''_{j'} = \emptyset$ para todo $j, j' \in J$ si $j \neq j'$. □

Teorema 3

Sea $(X, \mathcal{V})$ un espacio uniforme de dimensión cero, (Y, d) espacio seudométrico completo, ϕ una aplicación multívoca de X en Y semi-uniformemente contínua inferiormente, y $\phi(x)$ un subconjunto cerrado en $(Y, T_{\mathcal{U}_d})$.- Entonces, existe una aplicación f de X en Y uniformemente contínua tal que $f(x) \in \phi(x)$ para todo $x \in X$.-

Demostración

Por ser la aplicación $\phi: X \to 2^Y$ semi-uniformemente contínua, para todo n existe una $B_{1/2^n}$-selección uniformemente para ϕ $\{A_i, y_i\}_{i\in I}$, donde $\{A_i / y \in I\}$ por el lema 1-(a) es un recubrimiento uniforme de $(x, \mathcal{V})$ de elementos disjuntos dos a dos.- Se define una aplicación $f_n: X \to y$

$$x \to f_n(x) = y_i \quad \text{si } x \in A_i$$

que es uniformemente contínua de $(X, \mathcal{V})$ en $(Y, \mathcal{U}_d)$ por el lema 1-(b).- Por otro lado, como para todo $x \in X$ existe un único $i \in I$ tal que $x \in A_i$, se verifica que $\phi(x) \cap B_{1/2^n}[f_n(x)] = \phi(x) \cap B_{1/2^n}[y_i] \neq \emptyset$ y por tanto $f_n(x) \in B_{1/2^n}[\phi(x)]$ para todo $x \in X$.

Como $B_{1/2^{n+1}} \cdot B_{1/2^{n+1}} \subset B_{1/2^n}$ y ϕ semi-uniformemente contínua inferiormente, por el lema 2 existe una $B_{1/2^{n+1}}$-selección uniforme para ϕ, $\{A'_j, y'_j\}_{j\in J}$ con $A'_j \cap A'_{j'} = \emptyset$ si $j \neq j'$ subordinada a $\{A_i, y_i\}_{i\in I}$.- Sea f_{n+1} la aplicación definida por

$$f_{n+1}: X \to y$$
$$x \to f_{n+1}(x) = y'_j \quad \text{si } x \in A'_j$$

Por un razonamiento análogo al hecho sobre f_n, se tiene que f_{n+1} es uniformemente contínua y $f_{n+1}(x) \in B_{1/2^{n+1}}[\phi(x)]$ para todo $x \in X$. Además, como para todo $x \in X$ existen $j \in J$ e $i \in I$ tales que $x \in A'_j \subset A_i$, se verifica que $f_{n+1}(x) = y'_j \in B_{1/2^n}[y_i] = B_{1/2^n}[f_n(x)]$, y por tanto $d(f_{n+1}(x), f_n(x)) < \frac{1}{2^n}$ para todo x.-

Partiendo de n=1 y procediendo por inducción, se tiene una sucesión $\{f_n / n \in N\}$ de aplicaciones de X en Y tales que

i) Para todo n, f_n es uniformemente contínua

ii) Para todo n y todo $x \in X$, $f_n(x) \in B_{1/2^n}[\phi(x)]$

iii) Para todo n y todo $x \in X$, $d(f_n(x), f_{n+1}(x)) < \frac{1}{2^n}$

La sucesión $\{f_n(x)/n \in N\}$ para todo $x \in X$, es una sucesión de Cauchy como se dudece de la condición iii) que es convergente por ser (Y,d) espacio completo.- Entonces, la aplicación f definida por $f(x) = \lim_n \{f_n(x)\}$ para todo $x \in X$, es uniformemente contínua (2), y como $\phi(x)$ es un subconjunto cerrado para todo x, se tiene que $f(x) \in \phi(x)$ para todo $x \in X$ (3). □

Teorema 4

Sea $(X, \mathcal{V})$ un espacio uniforme de dimensión cero, $(Y, \mathcal{U})$ espacio uniforme, y ϕ una aplicación multívoca de X en Y semi-uniformemente contínua inferiormente tal que $\phi(x)$ es un subconjunto de Y completo para todo $x \in X$, y la familia $\{\phi(x)/x \in X\}$ equimetrizable uniformemente por medio de $\mathcal{U}_0 \subset \mathcal{U}$. Entonces, existe una aplicación f de X en Y uniformemente contínua tal que

$f(x) \in \phi(x)$ para todo $x \in X$.

Demostración

Sea $\{U_n / n \in N\}$ una sucesión de elementos de $\mathcal{U}$ que son base de una uniformidad $\mathcal{U}_o$ menos fina que $\mathcal{U}$ y verificando que para todo n, U_n es simétrico y $U_{n+1} \cdot U_{n+1} \subset U_n$.- Por ser ϕ una aplicación semi-uniformemente contínua inferiormente y $(X, \mathcal{V})$ un espacio uniforme de dimensión cero, existe por el lema 1-(a) una U_1-selección uniforme para ϕ $\{A_i^1, y_i^1\}_{i \in I}$ con $A_i^1 \cap A_{i'}^1 = \emptyset$ si $i \neq i'$ $i, i' \in I$.- Por otro lado, la aplicación

$$f_1 : X \to Y$$
$$x \to f_1(x) = y_i^1 \quad \text{si } x \in A_i^1$$

que es uniformemente contínua por el lema 1-(b), verifica que $f_1(x) \in U_1[\phi(x)]$ para todo $x \in X$.- En efecto, para todo $x \in X$, como existe $i \in I$ tal que $x \in A_i^1$, se verifica que $\phi(x) \cap U_1[y_i^1] \neq \emptyset$, por tanto existe $z \in \phi(x) \cap U_1[y_i^1] = \phi(x) \cap U_1[f_1(x)]$ de donde se deduce que $f_1(x) = y_i^1 \in U_1[\phi(x)]$ para todo $x \in X$.-

Como ϕ es semi-uniformemente contínua inferiormente y U_2 tal que $U_2 \cdot U_2 \subset U_1$, por el lema 2 existe $\{A_j^2, y_j^2\}_{j \in J}$ U_2-selección uniforme para ϕ subordinada a $\{A_i^1, y_i^1\}_{i \in I}$ con $A_j^2 \cap A_{j'}^2 \neq \emptyset$ si $j \neq j'$ y $j, j' \in J$.- Sea f_2 la aplicación definida por

$$f_2 : X \to Y$$
$$x \to f_2(x) = y_j^2 \quad \text{si } x \in A_j^2$$

.-Por un razonamiento análogo al hecho sobre f_1, se tiene que f_2 es uniformemente contínua y $f_2(x) \in U_2[\phi(x)]$ para todo $x \in X$.- Por otro lado, como para todo $x \in X$ existen $j \in J$ e $i \in I$ tales que $x \in A_j^2 \subset A_i^1$ e $y_j^2 \in U_1[y_i^1]$, se verifica que $(f_2(x), f_1(x)) = (y_j^2, y_i^1) \in U_1$ para todo $x \in X$.

Procediendo por inducción, se tiene una sucesión $\{f_n / n \in N\}$ de aplicaciones uniformemente contínuas de $(X, \mathcal{V})$ en $(Y, \mathcal{U})$ tales que para todo $x \in X$ y todo n se verifica que $f_n(x) \in U_n[\phi(x)]$ y $(f_{n+1}(x), f_n(x)) \in U_n$, lo que implica que $\phi(x) \cap U_{n-1}[f_n(x)] \neq \emptyset$ para todo $x \in X$.- Así, para todo $n \in N$ se define una aplicación multívoca ϕ_n; para $n=1$ $\phi_1 = \phi$ y para $n>1$ $\phi_n(x) = \phi(x) \cap U_{n-1}[\phi_n(x)]$.- Para todo $x \in X$ y todo n, los elementos de la sucesión $\{\phi_n / n \in N\}$ verifican que $\phi_{n+1}(x) \subset \phi_n(x)$ y $\phi_n(x) \subset \phi(x)$.- Además $\{\phi_n(x)/n \in N\}$ es base de filtro de Cauchy F_x en $\phi(x)$.- Como $\phi(x)$ es completo, para todo $x \in X$ existe $\overline{f}(x) \in \mathrm{Lim}\, F_x$ siendo $\overline{f}$ uniformemente contínua y verificando que $\overline{f}(x) \in \phi(x)$ para todo $x \in X$.- [DEMOSTRACION ANALOGA A LA DEL TEOREMA 2 - §4 - CAPITULO II] . □

Corolario 1

Sea $(X,\mathcal{V})$ un espacio uniforme de dimensión cero, $(Y,\mathcal{U})$ un espacio uniforme metrizable ,y ϕ una aplicación multívoca de X en Y semi-uniformemente contínua inferiormente tal que $\phi(x)$ es un subconjunto de Y completo para todo $x \in X$.- Entonces, existe una aplicación f uniformemente contínua tal que $f(x) \in \phi(x)$ para todo $x \in X$.-

Demostración

Es consecuencia del teorema anterior y del hecho que cualquier familia $\mathcal{H}$ de $P(Y)$ es uniformemente equimetrizable por medio de $\mathcal{U}_o = \mathcal{U}$.

® Este resultado también se puede demostrar sin hacer uso del teorema anterior.- Como $(Y,\mathcal{U})$ es un espacio metrizable, se puede hacer una demostración análoga a la del Teorema 3 usando técnicas aplicables cuando $(Y,\mathcal{U})$ es metrizable, pero no cuando se considere $\{\phi(x)/x \in X\}$ familia equimetrizable uniformemente por me dio de $\mathcal{U}_0$ pero $(Y,\mathcal{U})$ no metrizable.

Corolario 2

Sea G un grupo topológico metrizable, H un subgrupo completo de G tal que G/H es un espacio uniforme de dimensión cero y $\phi:G/H \to 2^G$ la aplicación definida por $\phi(\bar{x})=u^{-1}(\bar{x})$.- Entonces, existe una aplicación f de G/H en G uniformemente contínua tal que $f(\bar{x})\in\phi(\bar{x})$ para todo $\bar{x}\in G/H$.

Demostración

Es consecuencia del teorema anterior, del Ejemplo 2 y la Proposición 13 del párrafo 3 del capítulo II. □

Todos los resultados de este capítulo se han obtenida en espacios uniformes de dimensión cero.- Esta hipótesis no se puede sustituir por ser espacio topológico de dimensión cero.-

Ejemplo 1

Sean los grupos topológicos $(R,+)$ y $(S^1,.)$, Q el conjunto de los números racionales y $S^1_Q = \exp|_Q(Q)$.- Consideremos $X=S^1_Q$ e $Y=Q$.- Entonces, existen una familia de subconjunto completos de Y y una aplicación ϕ semi-uniformemente contínua inferiormente, para la que no existe una selección uniformemente contínua.

Demostración

Consideremos $(R,+)$ y $(S^1,.)$ con la uniformidad de grupo topológico y el homomorfismo contínuo y por tanto uniformemente contínuo definido por $\exp: R \to S^1$

$$x \to \exp(x) = e^{2\pi i x}$$

Sea $(Q,+)$ el subgrupo de $(R,+)$ con la uniformidad inducida y y$(S^1_Q,.)$ el subgrupo de $(S^1,.)$ que tiene como uniformidad inducida la de grupo topológico [Capítulo III-GROUPS TOPOLO-BOURBAKI].

Sea ϕ la aplicación multívoca de S^1_Q en Q definida por $\phi: S^1_Q \to 2^Q$
$x \to \phi(x) = \exp^{-1}(x)$ que es semicontínua inferiormente [Ejemplo 1-2* - pág. 362, CONTINUOUS SELECTION-I - E. MICHAEL]. Como S^1_Q es un espacio perfectamente de dimensión cero, Q un espacio metrizable y $\phi(x)$ un subconjunto completo, existe una aplicación $f: S^1_Q \to Q$ contínua tal que $f(x) \in \phi(x)$ para todo $x \in S^1_Q$ [Teorema 1 - pág. 1400 - ON CONTINUOUS SELECTIONS IN UNIFORM SPACES - B.A. GEILER].

Por otro lado, la aplicación ϕ es semi-uniformemente contínua inferiormente por el Ejemplo 2 - §3 del Capítulo II, y sin embargo para dicha aplicación no existe una selección uniformemente contínua.

Es claro que el espacio S^1_Q, que como espacio topológico tiene dimensión cero ,como espacio uniforme tiene dimensión uno porque es un subespacio de S^1 que es de dimensión uno y ser la complección de S^1_Q el espacio S^1.- Entonces, como $\overline{S^1_Q} = S^1$ [Teorema 3-1, pág. 452 - UNIFORM SPACES - M. BAHAUDDIN y J.THOMAS] se verifica que $\check{H}_1(S^1_Q) = \check{H}_1(S^1) = Z$ siendo $\check{H}_1(S^1_Q)$ homología de Čech uniforme de S^1_Q (respectivamente, $\check{H}_1(S^1)$ de S^1) que por ser compacto, es la homología de Čech como espacio topológico.

Supongamos que existe una aplicación $f: S^1_Q \to Q$ uniformemente contínua tal que $\exp . f = 1_{S^1_Q}$.- Entonces, $\check{H}(\exp.).\check{H}(f) = 1$ y co mo $\check{H}_1(Q)=0$ [Teorema 4-1 - pág. 453 - UNIFORM SPACES-M.BAHAUDDIN y J. THOMAS], tendríamos que

$$\begin{tikzcd}
\check{H}_1(S^1_Q) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \check{H}_1(Q) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \check{H}_1(S^1) \arrow[d, equal] \\
Z \arrow[rr, "1"] & 0 & Z
\end{tikzcd}$$

lo cual es absurdo.- Por tanto, no existe una aplicación $f:S^1_Q \to Q$ uniformemente contínua verificando que $f(x)\in\phi(x)$ para todo $x\in S^1_Q$. □

Por otro lado, a la categoría de los espacios uniformes de dimensión cero pertenecen espacios no discretos como lo prueba el siguiente ejemplo.

<u>Ejemplo 2</u>

Sea Z el conjunto de los números enteros que con la topología discreta es un espacio de dimensión cero, y Z^N el conjunto de las sucesiones $\{x_n/n\in N,\ x_n\in Z\}$ con la suma definida por $(x_n)_{n\in N}+(y_n)_{n\in N}=(x_n+y_n)_{n\in N}\in Z^N$. Entonces, el grupo topológico $(Z^N,+)$ es un espacio uniforme no discreto de dimensión cero.

En efecto, como $(Z^N,+)$ es un grupo topológico, los elementos U de la uniformidad estarán definidos por $U=\{((x_n)_{n\in N}\ (y_n)_{n\in N})\in Z^N\times Z^N/(x_n)_{n\in N}-(y_n)_{n\in N}\in V_n\}$ donde $\{V_n/n\in N\}$ es un sistema fundamental de entornos de $\bar{0}$ en Z^N.- Considerando la uniformidad producto del espacio Z^N, se tiene que $U = U_{i_1}\times \dots \times U_{i_n}\times\left[Z^{N-\{i_1\dots i_n\}}\times Z^{N-\{i_1\dots i_n\}}\right]$

$= \{((x_n)_{n\in N}, (y_n)_{n\in N}) \in Z^N \times Z^N \,/\, (x_n)_{n\in N} - (y_n)_{n\in N} \in V_n\}$

con $V_n = G_{i_1} \times \ldots\ldots \times G_{i_n} \times Z^{N-\{i_1 \ldots\ldots\ldots i_n\}}$ y U_{i_j} elemento de la uniformidad asociado a G_{i_j} $j=1\ldots n$

Entonces, el grupo $(Z^N,+)$ como espacio uniforme con la uniformidad inducida por la estructura de grupo, coincide con el espacio uniforme $(Z^N,\mathcal{U})$ con la uniformidad producto.

Los espacios Z y $X_\alpha = \prod_{FIN} Z$, con la topología discreta, son espacios uniformes de dimensión cero.- Entonces, como Z^N es el límite inverso de los espacios X_α, la δ-dimensión de Z^N es cero [Enunciado 32, pág. 71 - UNIFORM SPACES - J. ISBELL] y por tanto $(Z^N,\mathcal{U})$ es un espacio uniforme de dimensión cero [Enunciado 32 - pág. 90 - UNIFORM SPACES - J. ISBELL]. □

(1) $(X,\mathcal{V})$ es un espacio uniforme de dimensión cero si para todo recubrimiento uniforme $\{A_i / i\in I\}$ de $(X,\mathcal{V})$, existe un refinamiento de elementos disjuntos dos a dos.

(2) f es uniformemente contínua.- En efecto, para $\varepsilon > 0$

$d(f(x),f(y)) \leq d(f(x),f_n(x)) + d(f_n(x),f_n(y)) + d(f_n(y),f(y))$

Como para $\varepsilon > 0$ existe n tal que $\sum_{i>n} \frac{1}{2^i} < \frac{\varepsilon}{3}$ y

$d(f_n(x),f_k(x)) < \sum_{i>n} \frac{1}{2^i} < \frac{\varepsilon}{3}$.- Tomando límite en $k\in N$ tene mos que $d(fn(x),f(x)) < \frac{\varepsilon}{3}$ para todo $x\in X$.- Además, por ser f_n e uniformemente contínua, existe $V\in\mathcal{V}$ tal que para todo $(x,y)\in V$ se tiene que $d(f_n(x),f_n(y)) < \frac{\varepsilon}{3}$.- Así, para todo $\varepsilon < 0$ existe $V\in\mathcal{V}$ tal que para todo $(x,y)\in V$ se verifica que $d(f(x),f(y)) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3}$, y por tanto f es uniformemente contínua.

(3) Evidentemente $f(x)\in\phi(x)$ para todo $x\in X$, pues para todo $x\in X$ existe $\{x_n | n\in N\}\subset\phi(x)$ tal que $d(f_n(x),x_n) < \frac{1}{2^n}$.- Entonces, como $\{f_n(x) | n\in N\}$ converge a $f(x)$ para todo x, y $d(f(x),x_n)\leq$ $\leq d(f(x),f_n(x)) + d(f_n(x),x_n)$, se tiene que $\{x_n | n\in N\}$ converge a $f(x)$, y por ser $\phi(x)$ un subconjunto cerrado se verifica que $f(x)\in\phi(x)$ para todo $x\in X$.

BIBLIOGRAFIA

BIBLIOGRAFIA

(1) ARENS, Richard - EXTENSION OF FUNCTIONS ON FULLY NORMAL SPACES - Pacific Y. Math. 2 (1952) (11-23).

(2) BAHAUDDIN M. y THOMAS J. - THE HOMOLOGY OF UNIFORM SPACES Cana. Y. Math. Vol. XXV nº 3 (1973) (449-455).

(3) BOURBAKI, N. - GROUPES TOPOLOGIQUES - Capítulo III Hermann

(4) CHOQUET, G - COURS D'ANALISE - TOMO II TOPOLOGIE.- J. CHAILLOU et J. HENRY PROBLÈMES DE TOPOLOGIE. Masson et Cie. (1964) (1971)

(5) DUGUNDJI, J. - AN EXTENSION OF TIETZE'S THEOREM. Pacific Y. Math. 1 (1951) (353-367)

(6) DEMING, R.W. - SOME POINT-SET PROPERTIES AND THE EDGE PATH GROUP OF A GENERALIZED UNIFORM SPACE. Trans. Amer. Math. Soc. 130 (1968) (378-405)

(7) ELLIS, R. - EXTENDING CONTINUOUS FUNCTION ON ZERO--DIMENSION SPACES Moth. Ann. (187) (1970) (114-122)

(8) ELLIS, R. - EXTENDING UNIFORMLY CONTINUOUS PSEUDO-UL
TRA METRIC AND UNIFORM RETRACTS
Proceeding Amer. Math. Soc., vol. 30,
Nº 3, Noviembre (1971) (599-602)

(9) ELLIS, R. - EXTENDING UNIFORMLY CONTINUOUS FUNCTIONS
Att. Accad. Maz. Lincei VIII Ser. Rend.
Cl. Sci. fis. mat. natur. (1974)
(318-321)

(10) FAKHOURY, H. - SELECTIONS CONTINUES DANS LES ESPACES
UNIFORMES.- C.R. Acad. Sci. Paris, Tomo
280 - Serie A (1975) (213-216)

(11) FONTANILLAS, J.- UN TEOREMA DE SELECCIONES UNIFORMES.
Revista Mat. His. Amer. IV Ser. 37
(1977) (3-18)

(12) GARCIA MARRERO, M. y otros - TOPOLOGIA I
Ed. Alhambra (1975)

(13) GADNER, L.T. y MILNES, P.- ON THE EXTENSION ON UNIFORMLY
CONTINUOUS FUNCTIONS
Canad. Math. Bull. vol. 18 (1) (1975)
(143-145)

(14) GEILER, B.A. - ON CONTINUOUS SELECTIONS IN UNIFORM
SPACES. Doklady Akad. Nauk SSSR. Tom.
195 (1970) (17-19)

(15) ISBELL, J.L. - ON FINITE - DIMENSIONAL UNIFORM SPACES
Pacific.Y.Math.V.9 (1959) (107-121)

(16) ISBELL, J.L. - ON FINITE - DIMENSIONAL UNIFORM SPACES- -II, Pacific Y. Math. V. 12 (1962) (291-302)

(17) ISBELL, J.L. - UNIFORM NEIGHBORHOOD RETRACTS Pacific Y. Math.v.11 (1961) (609-648)

(18) ISBELL, J.L. - UNIFORM SPACES American Mathematicas Society (1964)

(19) KATETOV, M. - ON REAL VALUED FUNCTIONS IN TOPOLOGICAL SPACES.- Fundamental Math. 38 (1951) (85-91)

(20) J.LINDENSTRAUSS- ON LINEAR PROJECTIONS IN BANACH SPACES Michigan Math. Y. 11 - (1964) (207-210)

(21) MICHAEL, E. - SOME EXTENSION THEOREMS FOR CONTINUOUS FUNCTIONS Pacific Y. Math. 3 (1953) (798-806)

(22) MICHAEL, E. - SELECTED SELECTION THEOREMS Amer.Math.Monthly 63 (1956) (233-238)

(23) MICHAEL, E. - CONTINUOUS SELECTION I Ann. Math. 63 (1956) (361-382)

(24) MICHAEL, E. - CONTINUOUS SELECTION II Ann. Math. 64 (1956) (562-580)

(25) MICHAEL, E. - CONTINUOUS SELECTION III Ann. Math. 65 nº 2 (1957) (375-390)

(26) MICHAEL, E. - A SELECTION THEOREM
Proc. Amer. Math. Soc. 17 (1966)
(1401-1406)

(27) MICHAEL, E. - CONVEX STRUCTURES AND CONTINUOUS SELECTIONS
Canadian Y. of Math. vol. XI - Nº 4
(1959) (556-575)

(28) NEPOMNJASCII, G.H.- ON SELECTION AND EXTENSION OF UNIFORMLY CONTINUOUS MAPPINGS
Doklady Akad. Naus SSSR Tom. 240, nº 6
(1978) Soviet Math. Doklady vol. 19,
nº 3 (1978) (749-753)

(29) PARTHASARATHY, T.- SELECTION THEOREMS AND THEIR APPLICATIONS CONTINUOUS SELECTION
Lectures Notes Math. Nº 263 (1972)

(30) PEARS, A.R. -- DIMENSION THEORY OF GENERAL SPACES
Cambridge University Press (1975)

(31) SCHWARTZ, L. - THÉORIE DES DISTRIBUTIONS
Ed. Hermann (1973)

(32) VIDOSSICH, G. - A THEOREM ON UNIFORMLY CONTINUOUS EXTENSIONS OF MAPPINGS DEFINED IN FINITE - DIMENSIONAL SPACES
Israel Y. Math. 7 (1969) (207-210)

INDICE

I N D I C E